

UNIVERZITET U NIŠU  
ELEKTRONSKI FAKULTET

---

# DIGITALNA OBRADA SIGNALA

---

*Zbirka zadataka*

NIŠ, 2020.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Hardverska realizacija prenosne funkcije diskretnog sistema</b>	<b>5</b>
1.1	Direktna realizacija . . . . .	7



**1**

# **Hardverska realizacija prenosne funkcije diskretnog sistema**

Tab. 1.1: Z-Transformacija

Signal	Z-Transformacija
$\{\delta[n]\}$	1
$\{\delta[n-m]\}$	$z^{-m}$
$\{u[n]\}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$\{u[n-m]\}$	$\frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$
$\{(-1)^n h[n]\}$	$\frac{1}{1+z^{-1}}$
$\{n\}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\{a^n\}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$\{na^n\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$\{n^2 a^n\}$	$\frac{az^{-1} + a^2 z^{-2}}{(1-az^{-1})^3}$
$\{\sin[n\theta]\}$	$\frac{z^{-1} \sin \theta}{1 - 2z^{-1} \cos \theta + z^{-2}}$
$\{\cos[n\theta]\}$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \theta}{1 - 2z^{-1} \cos \theta + z^{-2}}$
$\{a^n \sin[n\theta]\}$	$\frac{az^{-1} \sin \theta}{1 - 2az^{-1} \cos \theta + a^2 z^{-2}}$
$\{a^n \cos[n\theta]\}$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \theta}{1 - 2az^{-1} \cos \theta + a^2 z^{-2}}$

Prvi korak u realizaciji filtera je određivanje prenosne funkcije  $H(z)$ . Kao ulazni parametri koriste se granične frekvencije filtera (granice propusnih i nepropusnih opsega) i dozvoljena slabljenja unutar svakog opsega. U propusnim opsezima (propusnik niskih (ili visokih) frekvencija ima samo jedan) je neophodno da pojačanje sistema bude blisko jedinici da bi komponente spektra iz ove oblasti dospele na izlaz sistema (filtera) manje više neizmenjene. Ista karakteristika umesto preko pojačanja (modula amplitudske karakteristike) može biti zadata preko slabljenja, koje je definisano kao  $-20\log_{10}(\text{pojaćanje})$ , što znači da u idealnom slučaju u propusnom opsegu se želi da obezbedi slabljenje od 0 dB ( $-20\log_{10}(1) = 0$ ). U praksi se idealna karakteristika aproksimira i dozvoljava neko maksimalno slabljenje u propusnom opsegu  $a_{max}$ . U mnogom primenama uobičajeno je da unutar propusnog opsega bude dozvoljeno slabljenje do 3 dB. Nepropusni opseg je dobio takvo ime jer na tim frekvencijama je cilj da se na izlazu filtera ne pojave komponente spektra koje su inače prisutne u ulaznom signalu. Dakle u nepropusnom opsegu je u idealnom slučaju pojačanje sistema jednako nuli a u realnom slučaju je blisko nuli. Kako je  $-20\log_{10}(0) = \infty$ , idealni filter u nepropusnom opsegu ima beskonačno slabljenje. Realni filter će u nepropusnom opsegu imati pojačanje blisko nuli odnosno veliko slabljenje. Na primer, ako je dozvoljeno da pojačanje bude maksimalno 0.001 (umesto idealne nulte vrednosti) takav filter ima slabljenje od bar  $-20\log_{10}(0.001) = -20\log_{10}(10^{-3}) = -20 \cdot (-3) = 60$  decibela ( $a_{min} = 60$  dB).

Na osnovu zadatih specifikacija rešava se matematički problem u  $z$  ravni (ova oblast se izučava unutar drugih predmeta, npr. Obrada audio signala...) koji omogućava da se dobiju koeficijenti polinoma prenosne funkcije. Unutar ovog kursa upoznaćete se sa metodama transformacije prenosne funkcije analognog filtera (određivanje njegove prenosne funkcije je bio matematički problem u  $s$  ravni). Koeficijenti filtera se najčešće određuju iterativnim metodama uz pomoć računara. Tačnost koeficijenta je definisana osobinama procesora tj. računara i vrednosti ovih koeficijenata možemo uslovno nazvati idealnim. Crtanjem karakteristike filtera sa dobijenim koeficijentima uveravamo se da su zadovoljene sve zadate specifikacije filtera. Za hardversku realizaciju digitalnog filtera koriste se samo 3 komponente: sabirač, množač i element za kašnjenje (koji unosi kašnjenje od jednog odbirka). Kako su u slučaju digitalnog filtera na ulazu nalaze brojevi (ti brojevi predstavljaju odbirke ulaznog signala) obrada signala se svodi na manipulaciju nad brojevima (sabiranje i množenje). Brojne vrednosti se čuvaju u memoriji a operacija kašnjenja se jednostavno realizuje upotrebom pomeračkog registra. Sama memorija određuje broj bitova koje imamo na raspolaganju za predstavljanje brojnih vrednosti. Praktično su vrednosti idealnih koeficijenata zaokružene i predstavljenje raspoloživim brojem bitova. Posle množenja dva broja broj cifara u razlomljenom delu raste (npr.  $1.2 \cdot 1.2 = 1.44$ ) tako da se rezultat množenja predstavlja raspoloživim brojem bitova tj. mora biti zaokružen. Sve ovo znači da zbog zaokruživanja vrednosti koeficijenata i rezultata množenja realizovani filter ima karakteristiku koja odstupa od idealne (od karakteristike kada se koriste idealne vrednosti za koeficijente). Uticaj zaokruživanja koeficijenta će biti pokazan kasnije na primeru. Degradiranje karakteristike filtera zbog zaokruživanja iziskuje potrebu da se pre hardverske realizacije analizom ustanovi minimalni broj bitova za predstavljanje koeficijenata kako bi dobijena karakteristika bila unutar dozvoljenih granica.

Posle definisanja broja bitova za predstavljanje koeficijenata na raspolaganju je prenosna funkcija koju treba realizovati. Krenuvši od prenosne funkcije moguće je odrediti više struktura koje realizuju isti filter. Na ovom mestu analiziraćemo direktnu, direktnu kanoničnu, kaskadnu i paralelnu realizaciju. Postoje i druge metode za realizaciju ali neće biti obuhvaćene ovim kursom.

## 1.1 Direktna realizacija

Data je prenosna funkcija diskretne mreže

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} \quad (1.1)$$

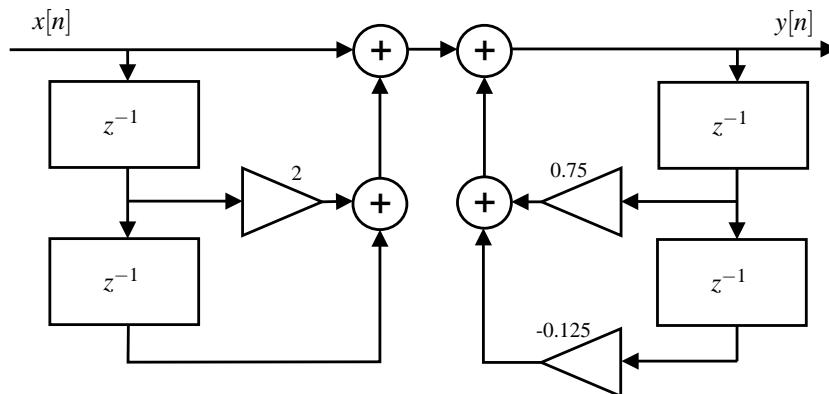
Odrediti strukturu koja odgovara direktnoj realizaciji date prenosne funkcije.

Rešenje : Unakrsnim množenjem i inverznom  $\mathcal{Z}$  transformacijom dolazi se do diferencne jednačine

$$\begin{aligned} Y(z)(1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}) &= X(z)(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \\ Y(z) - 0.75z^{-1}Y(z) + 0.125z^{-2}Y(z) &= X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$y[n] - 0.75y[n-1] + 0.125y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + 0.75y[n-1] - 0.125y[n-2] \quad (1.3)$$



Sl. 1.1: Direktna realizacija

Diferencna jednačina pokazuje da odbirak izlaznog signala  $y[n]$  zavisi od trenutno prisutnog odbirka ulaznog signala  $x[n]$  ali i od prethodnih odbiraka ulaznog i izlaznog signala. Direktnom implementacijom diferencne jednačine (1.3) dolazi se do strukture prikazane na slici 1.1.

U opštem slučaju, prenosna funkcija reda  $N$  ima oblik

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Nz^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (1.4)$$

i u strukturi za realizaciju filtra se upravo pojavljuju množači koji odbirke ulaznog signala  $x[n-k]$  množe sa  $b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  a odbirke izlaznog signala  $y[n-k]$  množe sa  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Odavde zaključujemo da je u opštem slučaju za direktnu realizaciju prenosne funkcije neophodno ukupno  $2N + 1$  množača. Naravno, ako su neki od koeficijenata jednaki nuli ili jedinici broj neophodnih množača biće umanjen za njihov broj. Na primer za prenosnu funkciju drugog reda potrebno je  $2N + 1 = 5$  množača. U datom primeru je  $b_0 = b_2 = 1$ , tako da je za realizaciju potrebno 3 množača, kako je prikazano na slici 1.1.

Ako je na ulazu elementa za kašnjenje prisutan signal  $x[n]$  ( $y[n]$ ) na njegovom izlazu se dobija  $x[n-1]$  ( $y[n-1]$ ). Ako se ovi signali dovedu na naredni element za kašnjenje, kao na slici 1.1, na izlazu su dostupni odbirki  $x[n-2]$  ( $y[n-2]$ ). Za prenosnu funkciju drugog reda, kao u datom primeru, potrebna su dva elementa za kašnjenje za čuvanje poslednja dva odbirka ulaznog signala kao i još dva za potrebe izlaznog signala. U opštem slučaju prenosne funkcije reda  $N$  realizacija zahteva  $2N$  elemenata za kašnjenje.

Sabirač na svom izlazu daje sumu dva broja prisutna na njegovim ulazima. Kada se navodi broj neophodnih sabirača za realizaciju nekog filtra podrazumeva se da je reč o dvoulaznim sabiračima. Da bi sabrali 3 broja neophodna su 2 sabirača. Prvi će odrediti sumu dva ulazna broja a drugi toj sumi dodaje treći broj. Svaki dodatni broj za sabiranje zahteva novi sabirač. Polinom reda  $N$  ima  $N + 1$  koeficijent ( $b_0, b_1, \dots, b_N$ ). Pri realizaciji filtra drugog reda potrebno je sabirati 3 (tj.  $N + 1$ ) odbirka ulaznog signala i 2 ( $N$ ) odbirka izlaznog signala. Dakle, broj potrebnih dvoulaznih sabirača za realizaciju prenosne funkcije reda  $N$  iznosi  $2N$ .

Množač je kompleksnija komponenta od sabirača. Množač zbog toga zahteva primetno više energije a kod realizacije na čipu neophodan je veći prostor za njegovu implementaciju. Neki digitalni uređaji ne koriste stalno napajanje (rade na baterije). U tom slučaju je od interesa pri implementaciji filtra odabrati strukturu koja zahteva minimalni broj množača kako bi se produžilo vreme autonomnog rada (duži vek trajanja baterije).