

UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Zbirka zadataka

NIŠ, 2020.

Sadržaj

1	Izračunavanje inverzne \mathcal{L} transformacije	5
1.1	Razvoj u parcijalne razlomke	5
1.2	Definicioni integral	5
1.3	Beskonačno deljenje polinoma	8
2	Prenosna funkcija diskretnih sistema	13
3	Diskretna Furijeova transformacija	23
3.1	Diskretna Furijeova transformacija i konvolucija	42
4	Kontinualno-diskretne transformacije	45
5	Zadaci	69
6	Hardverska realizacija prenosne funkcije diskretnog sistema	83
6.1	Direktna realizacija	85
	Literatura	87
	Indeks pojmova	87

1

Izračunavanje inverzne \mathcal{Z} transformacije

Inverzna \mathcal{Z} transformacija omogućava da se odredi signal $f[n]$ krenuvši od njegove \mathcal{Z} transformacije $F(z)$. Na raspolaganju su tri metode kojima se mogu odrediti odbirci signala $f[n]$.

1. Razvoj u parcijalne razlomke
2. Definicioni integral
3. Beskonačno deljenje polinoma

1.1 Razvoj u parcijalne razlomke

Na prethodnom času smo radili izračunavanje inverzne z transformacije razvijanjem izraza u parcijalne razlomke. Očekujem da do kraja semestra zbirka bude gotova u celosti, dakle da se ubace i oblasti koje smo već prešli na časovima. Redovno ću na sajtu katedre postavljati materijal a najkasnije u utorak kako bi u sredu bio dostupan za eventualna pitanja. Za konsultacije ću osim sredom od 12.00 do 14.00 biti dostupan i radnim danima od 20.00 do 21.00 h. Moj skype nalog: goran.stancic13

1.2 Definicioni integral

Odbirci signala u vremenskom domenu $f[n]$ se dobijaju konturnim integralom

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C F(z)z^{n-1} dz \quad (1.1)$$

gde C predstavlja zatvorenu konturu koja obuhvata sve polove podintegralne funkcije. Korišćenjem Košijeve teoreme o ostacima izračunavanje integrala se svodi na sumiranje ostataka u polovima podintegralne funkcije tj.

$$f[n] = \sum_k \text{Res}[F(z)z^{n-1}]|_{z=p_k} \quad (1.2)$$

gde su sa p_k obeleženi polovi podintegralne funkcije $F(z)z^{n-1}$ a $\text{Res}[F(z)z^{n-1}]$ predstavljaju ostatke u polovima $z = p_k$.

Zadatak 21 Upotrebom definicionog integrala odrediti inverznu \mathcal{Z} transformaciju izraza

$$F(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.75z^{-1})} \quad (1.3)$$

Rešenje

Množenjem brojioca i imenioca izraza (1.3) sa z^3 dobija se

$$F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.75)} \quad (1.4)$$

Primenom izraza (1.2) se dobija

$$f[n] = \sum_k \text{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)z^{n-1}}{z(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=p_k} = \sum_k \text{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=p_k} \quad (1.5)$$

Zanima nas da odredimo vrednosti svih odbiraka signla $f[n]$, tj. vrednosti $f[0]$, $f[1]$, $f[2]$, ..., odnosno vrednosti za $n = 0, 1, 2, \dots$

Za $n = 0$ izraz (1.5) postaje

$$\begin{aligned} f[0] &= \sum_k \text{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z^2(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=p_k} = \text{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z^2(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=0} \\ &+ \text{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z^2(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=1} + \text{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z^2(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=0.75} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Napomena: kada je pol dvostruk, kao što je sada slučaj sa polom u koordinatnom početku ($z = 0$) razvojem u parcijalne razlomke javljaju se dva člana oblika

$$\frac{r_1}{z^2} + \frac{r_2}{z}$$

Ostatak u polu koji treba izračunati za izraz (1.6) je vrednost r_2 . Ostatak u polu r_1 računa se na osnovu izraza

$$r_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{(z-1)(z-0.75)} \quad (1.7)$$

Ovu vrednost nije neophodno izračunavati ali nam je ovaj izraz potreban za određivanje r_2 tj.

$$\begin{aligned} r_2 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{(z-1)(z-0.75)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(3z^2 + 4z)(z-1)(z-0.75) - (z^3 + 2z^2 + 1)[1 \cdot (z-0.75) + (z-1) \cdot 1]}{(z-1)^2(z-0.75)^2} \\ &= \frac{0(-1)(-0.75) - (0+0+1)[1 \cdot (-0.75) + (0-1) \cdot 1]}{(-1)^2(-0.75)^2} = \frac{28}{9} \end{aligned} \quad (1.8)$$

tako da prvi odbirak signala $f[n]$ ima vrednost

$$\begin{aligned} f[0] &= r_2 + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z^2(z-0.75)} + \lim_{z \rightarrow 0.75} \frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z^2(z-1)} \\ &= \frac{28}{9} + \frac{4}{0.25} + \frac{0.75^3 + 2 \cdot 0.75^2 + 1}{0.75^2 \cdot (-0.25)} = 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Za $n = 1$ izraz (1.5) postaje

$$\begin{aligned}
f[1] &= \sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=p_k} = \operatorname{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=0} \\
&\quad + \operatorname{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=1} + \operatorname{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=0.75} \\
&= \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=0} + \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z(z-0.75)} \right] \Big|_{z=1} + \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)}{z(z-1)} \right] \Big|_{z=0.75} \\
&= \frac{1}{(-1)(-0.75)} + \frac{4}{0.25} + \frac{0.75^3 + 2 \cdot 0.75^2 + 1}{0.75(-0.25)} = \frac{4}{3} + 16 - \frac{163}{12} = \frac{15}{4}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Za $n \geq 2$ podintegralna funkcija ne poseduje pol u $z = 0$ tako da preostaju samo polovi u $z = 1$ i $z = 0.75$. Sada se odbirci signala $f[n]$ računaju na osnovu izraza

$$\begin{aligned}
f[n] &= \sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=p_k} \\
&= \operatorname{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=1} + \operatorname{Res} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)} \right] \Big|_{z=0.75} \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)z^{n-2}}{(z-0.75)} \right] + \lim_{z \rightarrow 0.75} \left[\frac{(z^3 + 2z^2 + 1)z^{n-2}}{(z-1)} \right] \\
&= \frac{4 \cdot 1^{n-2}}{(0.25)} + \frac{(0.75^3 + 2 \cdot 0.75^2 + 1)0.75^{n-2}}{-0.25} = 16 + \frac{(163/64)0.75^n}{(-0.25)0.75^2} = 16 - \frac{163}{9}0.75^n
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Na ovaj način određeni su svi elementi signala $f[n]$ tj.

$$f[n] = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 0 \\ \frac{15}{4} & \text{za } n = 1 \\ 16 - \frac{163}{9}0.75^n & \text{za } n \geq 2 \end{cases} \tag{1.12}$$

U nastavku ćemo samo pokušati da dobijeni rezultat damo u kompaktnijem obliku. Vrednost izraza $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ za $n = 0$ je $16 - \frac{163}{9} = \frac{16 \cdot 9 - 163}{9} = \frac{144 - 163}{9} = \frac{-19}{9}$. Za $n = 0$ odbirak signala $f[n]$ ima vrednost $1 = \frac{9}{9}$, tako da je izraz $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ za $n = 0$ potrebno korigovati ($1 = \frac{-19}{9} + \text{korekcija}_1$) za vrednost $\frac{28}{9}$.

Za $n = 1$ izraz $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ (koji važi samo za $n \geq 2$) ima vrednost $16 - \frac{163}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{29}{12}$ a odbirak signala $f[n]$ iznosi $\frac{15}{4}$, tako da vrednost izraza (1.14) treba korigovati za vrednost $\frac{4}{3}$ (dobijena iz jednačine $\frac{15}{4} = \frac{29}{12} + \text{korekcija}_2$).

Ovo nam omogućava da signal $f[n]$ zapišemo u obliku

$$f[n] = \frac{28}{9}\delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + 16 - \frac{163}{9}0.75^n \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.13}$$

Ovako dobijen rezultat možemo lako proveriti korišćenjem MATLAB[®]-a.

```

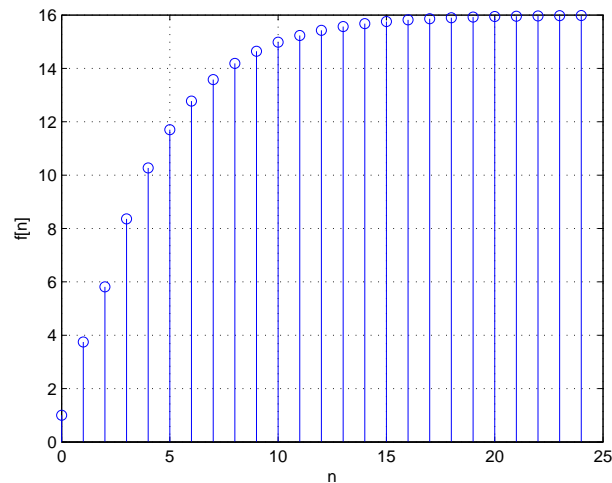
syms z n
Fz = (z^3 + 2*z^2 + 1) / (z * (z - 1) * (z - 0.75))
fn = iztrans(Fz)

```

na osnovu čega se dobija

```
fn =
(4*kronckerDelta(n - 1, 0))/3 - (163*(3/4)^n)/9 +
(28*kronckerDelta(n, 0))/9 + 16
```

Na slici 1.1 je prikazano prvih 25 odbiraka signala $f[n]$.



Sl. 1.1: Signal $f[n]$, prvih 25 odbiraka

1.3 Beskonačno deljenje polinoma

Zadatak 31 Metodom beskonačnog deljenja polinoma odrediti prva 4 člana signala $f[n]$ čija \mathcal{Z} transformacija ima vrednost

$$F(z) = \frac{1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.75z^{-1})} \quad (1.14)$$

Resenje:

Pre nego se pristupi deljenju polinoma neophodno je pomnožiti brojilac i imenilac sa z^3 , čime se dobija

$$F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 2z + 3}{(z - 0.25)(z - 0.5)(z - 0.75)} \quad (1.15)$$

a potom srediti imenilac kako bi se dobili polinomi po promenljivoj z sa elementima koji su poređani u opadajućem redosledu stepena. U tu svrhu možemo iskoristiti MATLAB[®] koristeći naredbe

```
syms z
Imenilac=collect((z-0.25)*(z-0.5)*(z-0.75))
```

što kao rezultat daje

```
Imenilac =
```

```
z^3 - (3*z^2)/2 + (11*z)/16 - 3/32
```


a na osnovu čega izraz (1.15) postaje

$$F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 2z + 3}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z - \frac{3}{32}} \quad (1.16)$$

a čijim se deljenjem dobija prvi član signala $f[n]$.

$$(z^3 + z^2 + 2z + 3) : (z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}) = 1 + \frac{\frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{16}z + \frac{99}{32}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}}$$

$$\frac{-z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}}$$

$$\frac{\frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{16}z + \frac{99}{32}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \quad (1.17)$$

Za deljenje polinoma može biti iskorišćen MATLAB[®]. Polinomi se unose kao vektori, tj. nizovi brojeva koji odgovaraju koeficijentima polinoma gde se podrazumeva da su članovi uneseni po opadajućoj vrednosti stepena. U konkretnom slučaju

```
brojilac=[1 1 2 3 ]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
```

Polinome delmo naredbom `deconv` i kao rezultat se dobija količnik r i ostatak deljenja q

```
[r,q]=deconv(brojilac, imenilac)
```

što kao rezultat daje

$r =$

1

$q =$

0 2.5000 1.3125 3.0938

U nastavku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.17)

$$\left(\frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{16}z + \frac{99}{32}\right) : \left(z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}\right) = \frac{5}{2}z^{-1} + \frac{\frac{81}{16}z + \frac{44}{32} + \frac{15}{64}z^{-1}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}}$$

$$\frac{-\frac{5}{2}z^2 + \frac{15}{4}z - \frac{55}{32} + \frac{15}{64}z^{-1}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}}$$

$$\frac{\frac{81}{16}z + \frac{44}{32} + \frac{15}{64}z^{-1}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \quad (1.18)$$

U narednom koraku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.18)

$$\begin{aligned} \left(\frac{81}{16}z + \frac{44}{32} + \frac{15}{64}z^{-1}\right) : \left(z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}\right) &= \frac{81}{16}z^{-2} + \frac{\frac{287}{32} - \frac{831}{256}z^{-1} + \frac{243}{512}z^{-2}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \\ -\frac{81}{16}z + \frac{243}{32} - \frac{891}{256}z^{-1} + \frac{243}{512}z^{-2} & \\ \hline \frac{287}{32} - \frac{831}{256}z^{-1} + \frac{243}{512}z^{-2} & \end{aligned} \quad (1.19)$$

S obzirom na opisanu proceduru i činjenice da deljenje izvodimo sa z^3 u narednom koraku bi se dobio količnik $\frac{287}{32}z^{-3}$. Uzevši u obzir sve prethodne izraze zaključujemo da je

$$F(z) = 1 + \frac{5}{2}z^{-1} + \frac{81}{16}z^{-2} + \frac{287}{32}z^{-3} + \frac{\text{Naredniostatak deljenja}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \quad (1.20)$$

Na osnovu izraza (1.20) zaključujemo da je

$$f[0] = 1, f[1] = \frac{5}{2}, f[2] = \frac{81}{16}, f[3] = \frac{287}{32}, \dots$$

s obzirom da z^{-1} ima fizički smisao i odgovara kašnjenju signala za jedan period odabiranja. Slično, član Bz^{-2} predstavlja odbirak amplitude B koji kasni za dva perioda odabiranja (taktna intervala) u odnosu na prvi odbirak koji je obeležen kao $f[0]$. Uostalom, do istog zaključka se dolazi i krenuvši od definicije \mathcal{Z} transformacije

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots$$

Upoređivanjem ovog izraza sa izrazom (1.20) lako se uočavaju vrednosti odbiraka $f[0], f[1], \dots$

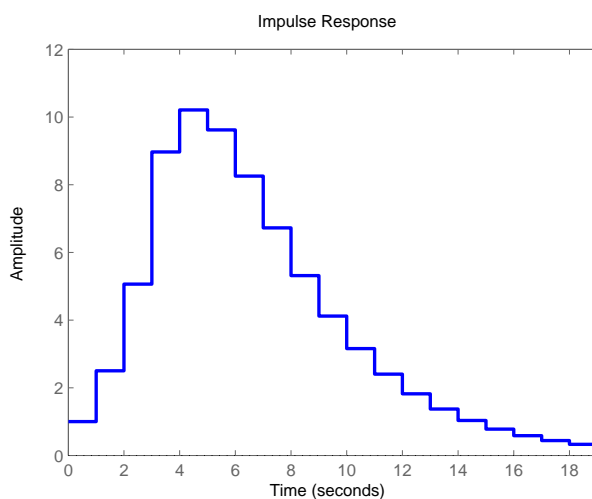
Signal $f[n]$ u MATLAB[®] -u može biti određen i naredbom `dimpulse`, čiji su ulazni argumenti koeficijenti polinoma iz brojioca i imenioca kao i dužina signala. Prvih 20 odbiraka signala $f[n]$ biće određeni naredbama

```
brojilac=[1 1 2 3]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
fn=dimpulse(brojilac, imenilac, 20)
dimpulse(brojilac, imenilac, 20)
```

Ovako određen signal $f[n]$ prikazan je na slici 1.2. (Naredba `dimpulse` služi za određivanje prvih n članova impulsnog odziva sistema čija je prenosna funkcija data preko polinoma.)

Ova metoda, za razliku od opisane prethodne dve nije praktična odnosno pogodna za određivanje vrednosti signala u vremenskom domenu na osnovu poznate \mathcal{Z} transformacije jer je za određivanje n -tog člana neophodno odrediti svih $n - 1$ prethodnih a svi se dobijaju deljenjem dva polinoma.

Najvažnije osobine tri opisane metode date su u tabeli 1.1.

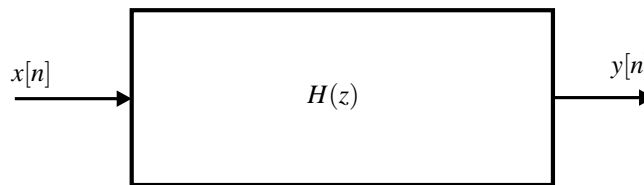
Sl. 1.2: Signal $f[n]$, prvih 20 odbirakaTab. 1.1: Osobine metoda za izračunavanje inverzne \mathcal{Z} transformacije

Metod	Prednosti	Mane
Razvoj na parcijalne razlomke	<ul style="list-style-type: none"> ♡ Dobro poznata ♡ Može se koristiti MATLAB[®] naredba <code>residue</code> 	<ul style="list-style-type: none"> ✘ Neophodno je da $F(z)$ bude racionalna funkcija
Definicioni integral	<ul style="list-style-type: none"> ♡ Može se koristiti i kada $F(z)$ nije racionalna funkcija 	<ul style="list-style-type: none"> ✘ Zahteva poznavanje teoreme o ostacima
Beskonačno deljenje polinoma	<ul style="list-style-type: none"> ♡ Korisna kada se traži mali broj odbiraka ♡ Korisna kada inverzna \mathcal{Z} transformacija nema rešenje u zatvorenom obliku ♡ Može se koristiti MATLAB[®] naredba <code>dimpulse</code> 	<ul style="list-style-type: none"> ✘ $F(z)$ mora da bude racionalna funkcija ✘ Deljenje može biti beskonačno

2

Prenosna funkcija diskretnih sistema

Diskretni sistem prikazan na slici 2.1



Sl. 2.1: Blok dijagram diskretnog sistema

može biti opisan *diferencnom* jednačinom

$$\begin{aligned} y[n] + b_1y[n-1] + b_2y[n-2] + b_3y[n-3] \cdots + b_ky[n-k] \\ = a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + a_3x[n-3] + \cdots + a_kx[n-k] \end{aligned} \quad (2.1)$$

gde a_i i b_i predstavljaju konstantne koeficijente. Prethodni izraz može biti dat u kompaktnijoj formi ako izraz (2.1) napišemo u obliku

$$\begin{aligned} y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + a_3x[n-3] + \cdots + a_kx[n-k] \\ - (b_1y[n-1] + b_2y[n-2] + b_3y[n-3] \cdots + b_ky[n-k]) \end{aligned} \quad (2.2)$$

odnosno

$$y[n] = \sum_{i=0}^k a_i x[n-i] - \sum_{i=1}^k b_i y[n-i] \quad (2.3)$$

Dakle, u opštem slučaju n -ti odbirak izlaznog signala $y[n]$ (koji se pojavljuje u trenutku nT , gde je T period odmeravanja ulaznog signala, na vremenskoj osi na kojoj smo nultim trenutkom proglasili poziciju kada se pojavio prvi odbirak ulaznog signala) zavisi od vrednosti prisutne na ulazu tj. od $x[n]$ ali i od k vrednosti koje su bile prisutne kako na ulazu sistema ($x[n-1], \dots, x[n-k]$) tako i na izlazu sistema ($y[n-1], \dots, y[n-k]$). Ovo ukazuje na činjenicu da je i kod softverske i kod hardverske realizacije diskretnog sistem neophodno nekako sačuvati k poslednjih odbiraka ulaznog i izlaznog signala. Kod softverske realizacije će biti neophodno da se rezerviše memorija dužine $2k$ za ove potrebe a kad je u pitanju hardverska realizacija za to će biti iskorišćena dva pomeračka n -tobitna (eng. *shift*) registra dužine k , gde n ukazuje na broj bitova koji je predviđen za predstavljanje koeficijenata a_i i b_i . Na osnovu izraza (2.3) uočavamo da se najnoviji izlazni odbirak označen sa $y[n]$ dobija samo na osnovu operacija množenja i sabiranja nad odbircima ulaznog i izlaznog signala.

Dakle za hardversku realizaciju bilo kog diskretnog sistema dovoljno je iskoristiti sabirače, množače i memorijske elemente (pomerački registar će praktično igrati ulogu elementa za kašnjenje jer on u sebi čuva uvek k poslednjih odbiraka signala, koji se pomeraju za jedno mesto pri pojavi svakog taktog impulsa a čiji je razmak upravo jednak periodu odabiranja signala, tj. ceo sistem radi na frekvenciji F_s (frekvencija odabiranja, eng. *Sampling frequency*)).

Ako pretpostavimo da su svi početni uslovi jednaki nuli, tj. da je $x[i] = 0$ i $y[i] = 0$ za $i < 0$, izračunavanjem \mathcal{Z} transformacije leve i desne strane izraza (2.3), uzimajući u obzir osobinu \mathcal{Z} transformacije

$$f[n - m] \Leftrightarrow z^{-m}F(z)$$

dobija se

$$\begin{aligned} Y(z) + b_1z^{-1}Y(z) + b_2z^{-2}Y(z) + b_3z^{-3}Y(z) \cdots + b_kz^{-k}Y(z) \\ = a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + a_2z^{-2}X(z) + a_3z^{-3}X(z) + \cdots + a_kz^{-k}X(z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Izvlačenjem ispred zagrada $X(z)$ i $Y(z)$

$$\begin{aligned} Y(z)[1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} \cdots + b_kz^{-k}] \\ = X(z)[a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \cdots + a_kz^{-k}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

dolazimo do veze između \mathcal{Z} transformacija izlaznog i ulaznog signala sistema

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \cdots + a_kz^{-k}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} \cdots + b_kz^{-k}}X(z) \quad (2.6)$$

U prethodnom izrazu racionalna funkcija dva polinoma po promenljivoj z predstavlja prenosnu funkciju sistema

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \cdots + a_kz^{-k}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} \cdots + b_kz^{-k}} \quad (2.7)$$

odnosno dolazimo do očekivane veze

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (2.8)$$

Dakle, \mathcal{Z} transformacija izlaznog signala se dobija množenjem prenosne funkcije sistema i \mathcal{Z} transformacije ulaznog signala. Vrednost izlaznog signala u vremenskom domenu $y[n]$ dobijamo inverznom \mathcal{Z} transformacijom nad $Y(z)$.

Impulsni odziv diskretnog sistema $h[n]$ se dobija na izlazu sistema ako je na njegovom ulazu prisutan jedinični impuls (Dirakov impuls) $x[n] = \delta[n]$. Kako je

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1 \quad (2.9)$$

na osnovu izraza (2.8) je

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \cdot 1 = H(z) \quad (2.10)$$

odnosno, impulsni odziv diskretnog sistema se može dobiti inverznom \mathcal{Z} transformacijom prenosne funkcije sistema

$$y[n] = h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} \quad (2.11)$$

Zadatak 31 Diferencna jednačina koja daje vezu između odbiraka ulaznog i izlaznog signala diskretnog sistema, data je izrazom

$$y[n] - 0.5y[n-1] + 0.125y[n-2] = x[n] + x[n-1] \quad (2.12)$$

Izračunati

a) Prenosnu funkciju sistema $H(z)$

b) Diskretni impulsni odziv sistema $h[n]$

c) Odziv ovog sistema ako se na njegovom ulazu nalazi jedinična funkcija (Hevisajdova funkcija) $u_0[n]$

Rešenje:

a) Nalaženjem \mathcal{Z} transformacije leve i desne strane izraza (2.12)

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) + 0.125z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z) \quad (2.13)$$

odnosno

$$Y(z)[1 - 0.5z^{-1} + 0.125z^{-2}] = X(z)[1 + z^{-1}] \quad (2.14)$$

dolazi se do prenosne funkcije diskretnog sistema

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1} + 0.125z^{-2}} = \frac{z^2 + z}{z^2 - 0.5z + 0.125} \quad (2.15)$$

b) Da bi se odredio impulsni odziv sistema $h[n]$ potrebno je izračunati inverznu \mathcal{Z} transformaciju izraza (2.15). Koristićemo postupak razvoja u parcijalne razlomke kod kog se ne razvija sama funkcija $H(z)$ već

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z^2 - 0.5z + 0.125} \quad (2.16)$$

Kako je polinom u brojiocu nižeg reda od polinoma u imeniocu, može se odmah pristupiti razvoju ove funkcije. Polinom u imeniocu ima nule (što su polovi prenosne funkcije)

$$z_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4 \cdot 0.125}}{2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 - 0.5}}{2} = \frac{0.5 \pm j0.5}{2} = 0.25 \pm j0.25$$

pa možemo pisati

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{r_1}{z - z_1} + \frac{r_2}{z - z_2} = \frac{r_1}{z - (0.25 + j0.25)} + \frac{r_2}{z - (0.25 - j0.25)}$$

Ostaci u polovima imaju vrednost

$$r_1 = \lim_{z \rightarrow 0.25 + j0.25} \frac{z+1}{z - (0.25 - j0.25)} = \frac{0.25 + j0.25 + 1}{0.25 + j0.25 - (0.25 - j0.25)} = \frac{1.25 + j0.25}{j0.5} = 0.5 - j2.5$$

dok se r_2 izračunava iz izraza

$$r_2 = \lim_{z \rightarrow 0.25 - j0.25} \frac{z+1}{z - (0.25 + j0.25)}$$

koji nije neophodno dovesti do kraja s obzirom da konjugovano kompleksni polovi imaju konjugovano kompleksne ostatke, tj. $r_2 = r_1^* = 0.5 + j2.5$, čime smo došli do identiteta

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{0.5 - j2.5}{z - 0.25 - j0.25} + \frac{0.5 + j2.5}{z - 0.25 + j0.25}$$

Uzevši u obzir da stepena funkcija ima \mathcal{Z} transformaciju

$$a^n u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z - a}$$

za $|z| > a$, inverzna \mathcal{Z} transformacija nas dovodi do vrednosti impulsnog odziva

$$\begin{aligned} h[n] &= (0.5 - j2.5)(0.25 + j0.25)^n + (0.5 + j2.5)(0.25 - j0.25)^n \\ &= (0.5 - j2.5)(0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4})^n + (0.5 + j2.5)(0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^n \\ &= 0.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{jn\pi/4}] + 0.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{-jn\pi/4}] \\ &\quad - j2.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{jn\pi/4}] + j2.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{-jn\pi/4}] \\ &= 0.5[(0.25\sqrt{2})^n (e^{jn\pi/4} + e^{-jn\pi/4})] - j2.5[(0.25\sqrt{2})^n (e^{jn\pi/4} - e^{-jn\pi/4})] \end{aligned} \quad (2.17)$$

koji ima vrednost

$$h[n] = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n (\cos(n\pi/4) + 5\sin(n\pi/4)) \quad (2.18)$$

Dakle za $n = 0$ dobija se prvi odbirak

$$h[0] = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^0 (\cos(0) + 5\sin(0)) = 1$$

za $n = 1$

$$h[1] = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^1 (\cos(\pi/4) + 5\sin(\pi/4)) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

i tako dalje. Vrednosti niza $h[n]$ lako se određuju i prikazuju uz pomoć MATLAB[®] -a

```
n=0:19;
hn=(sqrt(2)/4).^n.*(cos(n*pi/4)+5*sin(n*pi/4))
```

što daje

hn =

Columns 1 through 7

```
1.0000    1.5000    0.6250    0.1250   -0.0156   -0.0234   -0.0098
```

Columns 8 through 14

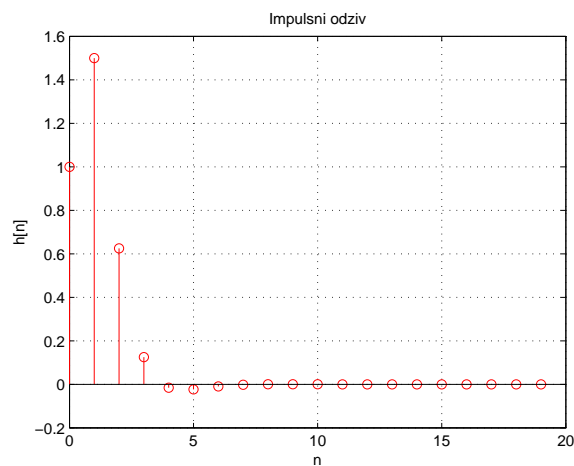
```
-0.0020    0.0002    0.0004    0.0002    0.0000   -0.0000   -0.0000
```

Columns 15 through 20

```
-0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```


Napomena: U MATLAB[®] -u sa * i ^ su obeležene operacije množenja i stepenovanja, respektivno. Ove operacije su predviđene za rad sa matricama, dok su promenljive specijalan slučaj matrice dimezija 1×1 . Ukoliko nije reč o matricnom množenju, već želimo da pomnožimo svaki član vektora $\mathbf{a} = [a(1), a(2), a(3)]$ odgovarajućim članom vektora $\mathbf{b} = [b(1), b(2), b(3)]$ (koji moraju biti iste dužine), kao rezultat se dobija novi vektor iste dužine čiji su elementi $\mathbf{a} * \mathbf{b} = [a(1) * b(1), a(2) * b(2), a(3) * b(3)]$. U sva tri slučaja reč je o vektorima, koji su specijalni slučaj matrice koja poseduje samo jednu vrstu i dužinu 3. Da je u izrazima korišćen znak ; umesto zareza, elemnti sva tri vektora bi imali identične vrednosti ali bi predstavljali specijalni slučaj matrice koja poseduje samo jednu kolonu.

Impulsni odziv $h[n]$ je prikazan na slici 2.2.



Sl. 2.2: Impulsni odziv diskretnog sistema

Treba uočiti da prenosna funkcija sistema poseduje i brojilac i imenilac, dakle reč je o rekurzivnom filtru (eng. *Infinite Impulse Response -IIR*), odnosno impulsni odziv sistema (izlaz kada je na ulazu Dirakov impuls) je beskonačno dug. Sa slike 2.2 se može pogrešno zaključiti da je impulsni odziv sistema jednak nuli već za $n = 10$ a u stvari njegova vrednost je $h[10] = 3.6621e - 04$.

Da bi bolje shvatili o čemu je reč, prikazaćemo vrednosti zadnjih 9 odbiraka ($h[11]$ do $h[19]$).

```
>> hn(11:19)
```

```
ans =
```

```
1.0e-03 *
```

```
Columns 1 through 7
```

```
0.1526    0.0305   -0.0038   -0.0057   -0.0024   -0.0005    0.0001
```

```
Columns 8 through 9
```

```
0.0001    0.0000
```

I odavde se može pogrešno zaključiti da je $h[19]$ jednak nuli a u stvari njegova vrednost je $h[19] = 3.7253e-08$.

Problem određivanja ostataka u polovima može lako biti rešen upotrebom naredbe `residue` u MATLAB[®] -u

```
brojilac=[0 1 1];
```

```
imenilac=[1 -0.5 0.125];
[r,p]=residue(brojilac,imenilac)
```

što daje kao rezultat polove smeštene u vektor p i odgovarajuće ostatke u vektoru r

$r =$

```
0.5000 - 2.5000i
0.5000 + 2.5000i
```

$p =$

```
0.2500 + 0.2500i
0.2500 - 0.2500i
```

c) S obzirom na vezu $Y(z) = H(z)X(z)$, uz poznavanje inverzne \mathcal{Z} transformacije jedinične funkcije $u_0[n]$

$$u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

zaključujemo da je

$$Y(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - 0.5z + 0.125} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z(z^2 + z)}{(z^2 - 0.5z + 0.125)(z-1)}$$

tj.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 + z}{(z^2 - 0.5z + 0.125)(z-1)} \quad (2.19)$$

Izlaz sistema ćemo odrediti uz pomoć MATLAB[®]-a, tj. naredbe `residue`, za koju su nam potrebni koeficijenti polinoma u brojiocu i imeniocu. Koeficijenti imenioca će biti takođe određeni u MATLAB[®]-u korišćenjem paketa za simboličku analizu.

```
syms z
Brojilac=(z^2-0.5*z+0.125)*(z-1)
collect(Brojilac)
```

daje kao rezultat

```
z^3 - (3*z^2)/2 + (5*z)/8 - 1/8
```

odnosno

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 + z}{z^3 - (3/2)z^2 + (5/8)z - 1/8} \quad (2.20)$$

Sada određujemo polove i ostake u polovima

```
num=[0 1 1 0]
den=[1 -3/2 5/8 -1/8]
[r,p]=residue(num,den)
```

i oni iznose

r =

$$\begin{aligned} & 3.2000 + 0.0000i \\ & -1.1000 + 0.3000i \\ & -1.1000 - 0.3000i \end{aligned}$$

p =

$$\begin{aligned} & 1.0000 + 0.0000i \\ & 0.2500 + 0.2500i \\ & 0.2500 - 0.2500i \end{aligned}$$

Dakle, može se pisati

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 + z}{z^3 - (3/2)z^2 + (5/8)z - 1/8} = \frac{3.2}{z-1} + \frac{-1.1 + j0.3}{z-0.25 - j0.25} + \frac{-1.1 - j0.3}{z-0.25 + j0.25} \quad (2.21)$$

što daje

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{3.2z}{z-1} + \frac{(-1.1 + j0.3)z}{z-0.25 - j0.25} + \frac{(-1.1 - j0.3)z}{z-0.25 + j0.25} \\ &= \frac{3.2z}{z-1} + \frac{(-1.1 + j0.3)z}{z-0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4}} + \frac{(-1.1 - j0.3)z}{z-0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

S obzirom na vezu

$$a^n u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

za $|z| > a$ za odziv sistema kada je na ulazu Hevisajdova funkcija, dobija se

$$\begin{aligned} y[n] &= 3.2 + (-1.1 + j0.3)(0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4})^n + (-1.1 - j0.3)(0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^n \\ &= 3.2 - 1.1[(0.25\sqrt{2})^n(e^{jn\pi/4} + e^{-jn\pi/4})] + j0.3[(0.25\sqrt{2})^n(e^{jn\pi/4} - e^{-jn\pi/4})] \end{aligned}$$

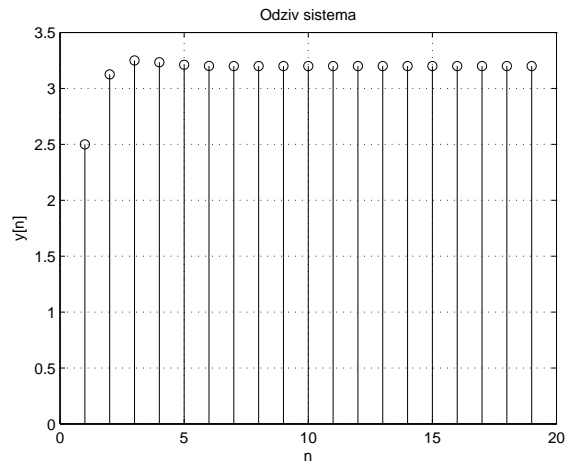
odnosno

$$\begin{aligned} y[n] &= 3.2 - 2.2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \cos(n\pi/4) - 0.6\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \sin(n\pi/4) \\ &= 3.2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n (2.2 \cos(n\pi/4) + 0.6 \sin(n\pi/4)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Odziv sistema $y[n]$ prikazan je na slici 2.3

Na slici 2.4 dati su ulazni (Dirakov signal $\delta[n]$ i jedinična funkcija $u_0[n]$) i izlazni signali (Impulsni odziv $h[n]$ i odziv $y[n]$). Naredbom `subplot(abc)`, koja ima tri argumenta **a**, **b** i **c**, se bira gde se željeni signal prikazuje. Parametar **a** ukazuje na to na koliko se delova slika deli po vertikali, **b** ukazuje na koliko se delova slika deli po horizontali, dok **c** govori o tome na kojoj od **a*****b** podslika će biti prikazan signal.

```
brojilac=[ 1 1 0];
imenilac=[1 -0.5 0.125];
dirak=[1 zeros(1,19)];
hevisajd=ones(1,20); n=[0:19];
imp_odz=filter(brojilac,imenilac,dirak);
odziv=filter(brojilac,imenilac,hevisajd);
```

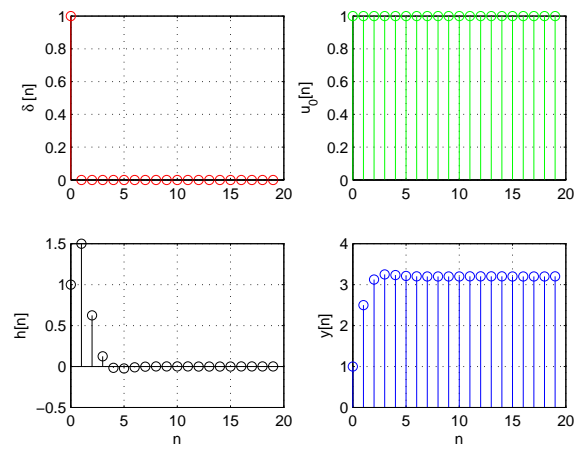
Sl. 2.3: Odziv diskretnog sistema na jediničnu funkciju $u_0[n]$

```

figure subplot(221)
stem(n,dirak,'r')
grid
ylabel('\delta [n]')
subplot(223)
stem(n,imp_odz,'k')
grid
ylabel('h[n]')
xlabel('n')
subplot(222)
stem(n,hevisajd,'g')
grid
ylabel('u_0[n]')
subplot(224)
stem(n,odziv,'b')
grid
xlabel('n')
ylabel('y[n]')

```

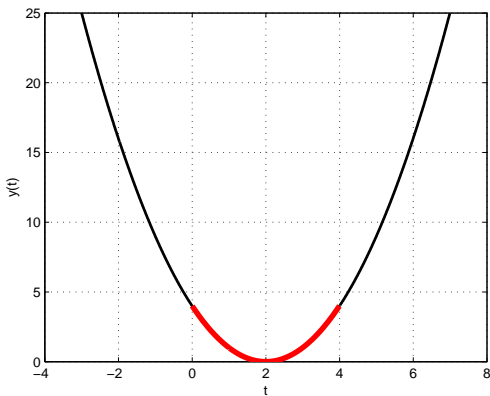
Naredba `zeros(a,b)` formira matricu sa a vrsta i b kolona ispunjenu nulama. Naredba je iskorišćena za formiranje Dirakovog impulsa, gde je samo prvi član jednak jedinici. Sličan je efekat naredbe `ones(a,b)` samo što se matrica popunjava jedinicama tako da je ova naredba pogodna za formiranje Hevisajdove funkcije. Naredbom `filter(a,b,ul)` se određuje izlaz sistema čija je prenosna funkcija data količnikom polinoma a i b , kada je na ulazu sistema prisutan signal smešten u vektoru ul . Dužina izlaznog signala jednaka je dužini ulaznog signala. Kako je cilj bio odrediti prvih 20 odbiraka izlaznog signala, formirali smo ulazni signal iste dužine.

SI. 2.4: Odziv diskretnog sistema na jedinični impuls $\delta[n]$ i jediničnu funkciju $u_0[n]$

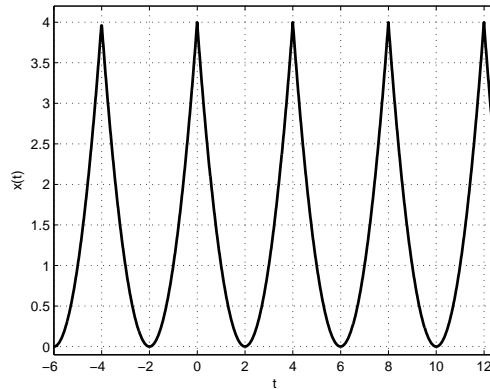
3

Diskretna Furijeova transformacija

Na slici 3.1 prikazana je funkcija $y(t) = t^2 - 4t + 4$.



Sl. 3.1: Signal $y(t) = t^2 - 4t + 4$



Sl. 3.2: Signal $x(t)$

Posmatrajmo periodični signal $x_p(t)$, osnovne periode $T = 4$, koji je nastao periodičnim ponavljanjem odsečka parabole $y(t)$ na intervalu $[0, 4]$ a koji je prikazan na slici 3.2, definisan sa

$$x_p(t + kT) = t^2 - 4t + 4 \quad \text{za} \quad 0 < t < 4 \quad \text{i} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Periodična funkcija može biti data preko Furijeovog reda

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.1)$$

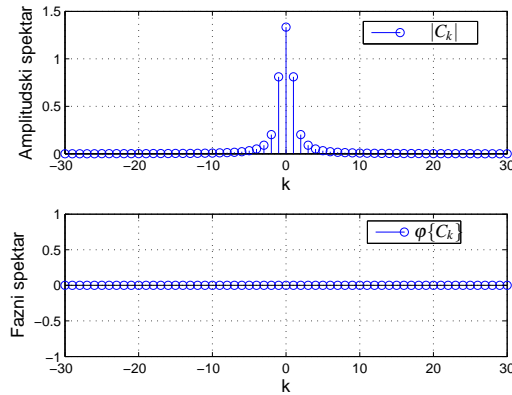
gde je

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Koeficijente C_k izračunavamo na osnovu izraza

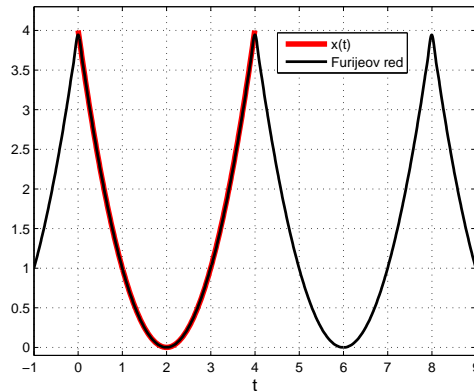
$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^4 (t^2 - 3t + 4) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \quad (3.2)$$

Na slici 3.2 su prikazani amplitudski fazni spektar signala za $-30 < k < 30$. Na x osi je k redni broj harmonika. Slučaju $k = 0$ odgovara koeficijent $C_0 = 1.333$, što je ujedno srednja vrednost signala $x_p(t)$. Kako perioda signala iznosi $T = 4$ sekunde, osnovni harmonik ima frekvenciju $f_0 = 1/4 = 0.25$ Hz, što odgovara kružnoj učestanosti od $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 1.7 \text{ rad/s}$ i na grafiku njemu odgovara $k = 1$. Četvrtom harmoniku $k = 4$ odgovara frekvencija $k f_0 = 1$ Hz. Jednakost periodične analogne funkcije bez prekida (data funkcija $x(t)$ je neprekidna) i njenog Furijeovog reda važi samo za slučaj kada $k \rightarrow \infty$.



Sl. 3.3: Amplitudski i fazni spektar signala $x_p(t)$

Furijeov red se sastoji od sume sinusnih i kosinusnih funkcija (predstavljenih preko kompleksne eksponencijalne funkcije) koje su i same neprekidne, tako da ako je funkcija $x_p(t)$ periodična ali sa prisutnim prekidima, čak i za $k \rightarrow \infty$ Furijeov red neće biti identičan sa $x_p(t)$. U ovakvim slučajevima je prisutan Gibsov fenomen.



Sl. 3.4: Signal $x_p(t)$ dat na osnovnoj periodi i njegova aproksimacija $x_{a30}(t)$ dobijena skraćivanjem Furijeovog reda zadržavanjem prvih 30 harmonika

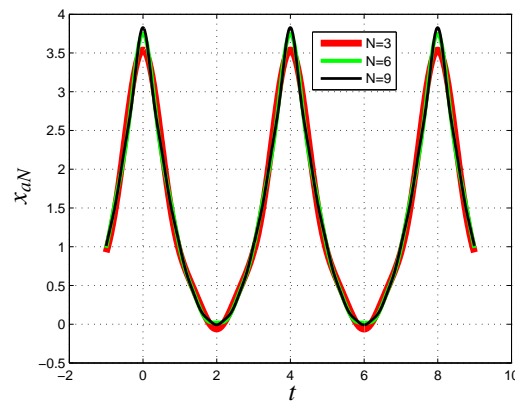
Kod prikazivanja spektra na x osi je frekvencija, nezavisno od toga da li na konkretnom grafiku stoji indeks k , sama frekvencija f data u hercima ili kružna učestanost ω_0 data u radijanima u sekundi. Spektar analognog periodičnog signala je diskretan (poseduje komponente samo na frekvencijama harmonika) sa komponentama na frekvencijama $f = 0$ (DC komponenta), $f = f_0$, $f = 2f_0$, $f = 3f_0$, itd. sve do beskonačnosti. Spektar neprekidnog periodičnog signala je bogatiji na niskim frekvencijama (komponente koje se značajno razlikuju od nule su na niskim frekvencijama) i u konkretnom slučaju uočavamo da (slika 3.3) su komponente spektra C_k za $k \geq 10$ zanemarljive.

Dakle, još jednom da naglasimo, tek beskonačno dug Furijeov red je identičan samoj periodičnoj neprekid-

noj funkciji $x_p(t)$. Odsecanjem reda na konačnu dužinu N dobija se nova funkcija $x_{aN}(t)$ koja manje ili više uspešno aproksimira polaznu funkciju $x_p(t)$ zavisno od vrednosti N tj. da li su izostavljene komponente spektra (Furijevog reda) značajno različite od nule.

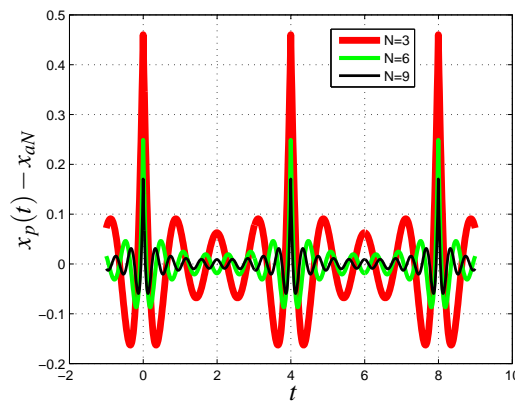
Sa slike (3.4) se uočava dobro poklapanje funkcije $x_p(t)$, koja je na slici prikazana samo na osnovnoj periodi a naravno da se periodično ponavlja na intervalu $[-\infty, +\infty]$, sa funkcijom x_{a30} . Bez izvođenja dokaza navešćemo činjenicu da je x_{aN} najbolja srednjekvadratna aproksimacija funkcije $x_p(t)$ za dato N .

Na slici 3.5 prikazane su aproksimacione funkcije x_{aN} , za različite dužine Furijevog reda.



Sl. 3.5: Aproksimacione funkcije $x_{aN}(t)$ za $N = 3, 6$ i 9 .

Na slici 3.6 je prikazano odstupanje aproksimacione funkcije dobijene skraćivanjem Furijevog reda od "idealne" funkcije $x_p(t)$.

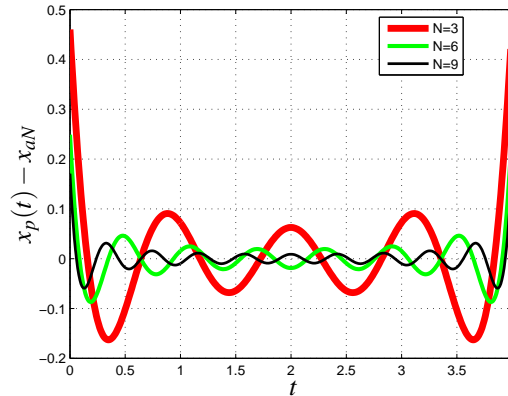
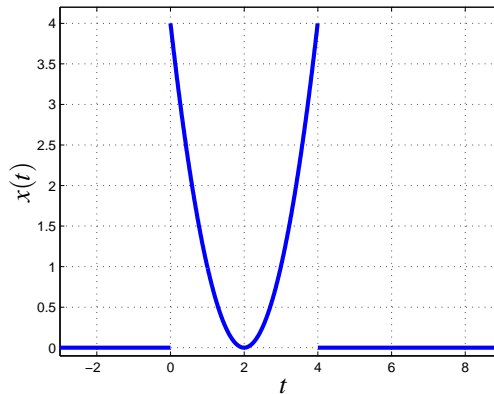


Sl. 3.6: Greška aproksimacije funkcije $x_p(t)$ za $N = 3, 6$ i 9 .

Da bi grafik greške bio uočljiviji na slici 3.7 je prikaza greška na osnovnoj periodi signala. Sa grafika se uočava značajno smanjivanje greške aproksimacije za malo povećanje dužine Furijevog reda. Za $N > 10$ ovaj efekat bi bio značajno manji jer su na tom delu spektra komponente već bliske nuli. U konkretnom primeru vidimo da se umesto beskonačne sume prostoperiodičnih funkcija (koja je identična posmatranom signalu) signal uspešno može predstaviti i sumom samo prvih desetak harmonika.

U praksi signale najčešće prikupljamo na nekom senzoru. Neka je za četiri sekunde pristigao signal oblika kao na slici 3.8.

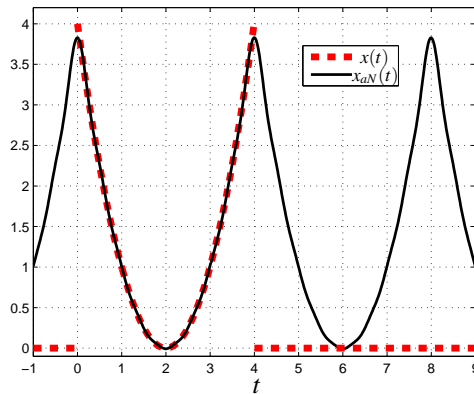
Pre merenja $t < 0$) i po završenom merenju $t > 4$) ne posedujemo informaciju o signalu (neka je reč o

Sl. 3.7: Greška aproksimacije funkcije $x_p(t)$ za $N = 3, 6$ i 9 .Sl. 3.8: Signal $x(t)$ - neperiodičan

pojavi koja je neponovljiva, npr. neka je u pitanju signal zemljotresa zabeležen na seizmografu). Da bi videli spektar ovog signala koristili bi već opisani matematički aparat i dobili bi identični rezultat kao i sa signalom $x_p(t)$. U ovom slučaju na osnovnoj periodi $0 \leq t \leq 4$, imali bi poklapanje Furijeovog reda i funkcije $x(t)$ za $k \rightarrow \infty$. Međutim za $t < 0$ i $t > 4$ signal $x(t)$ ima vrednost jednaku nuli dok Furijeov red daje funkciju koja se periodično ponavlja, kao što je prikazano na slici 3.9.

Koeficijenti C_k u opisanom primeru su određeni programom koji je priložen u nastavku. Pomoću njega su nacrtane i slike 3.3 i 3.4 za $N = 30$. Iza znaka procenta u MATLAB[®]-u sledi komentar.

```
t=sym('t')%definise simbolicku promenljivu t
N=3; %duzina Furijeovog reda
T=4;%perioda
k=[-N:N]';% vektor indeksa koeficijenata C_k. ' na kraju govori
% o transponovanju vektora tj. k je vektor kolona
pom=-j*2*pi/T;%pomocna promenljiva da ubrza izracunavanje ...
C_ksym=(1/T)*int((t^2-4*t+4)*exp(-pom*k*t),t,0,T);% Paket za simbolicku
analizu omogucava izracunavanje integrala.Prvi argument je
%funkcija koja se integrali ,integrali se po promenljivoj t-drugi
%argument, integral je odredjeni sa granicama integraljenja 0 i T.
C_k=double(C_ksym);% Simbolicke vrednosti smestene u vektor C_sym se
%pretvaraju u brojne vrednosti u formatu double precision
```

Sl. 3.9: Signal $x(t)$ - neperiodičan

```

C_k=C_k';% U formuli za C_ksym figurise vektor k koji je kolona, tako
%da je i vektor C_ksym kolona. Ovde ga transponujemo da postane vektor
%vrsta
figure %crtanje spektra
subplot(211)
stem(k,abs(C_k))
grid
xlabel('k','FontSize',13);
ylabel('Amplitudski spektar','FontSize',13);
legend('Ckf')
subplot(212)
stem(k,angle(C_k))
legend('Ckf') grid
xlabel('k','FontSize',13);
ylabel('Fazni spektar','FontSize',13);
t=[-1:0.01:9]; %vreme, na ovom opsegu cemo crtati signale
matrica=exp(-pom*k*t);%pomocna matrica za crtanje signala
f_apr=C_k*mat;% aproksimacija funkcije konacnim Furijeovim redom duzine
% N za svaku vrednost t, izracunava f_apr(t)
figure % crtanje signala i njegove aproksimacije
plot(t2,yt2,'r','LineWidth',4)
hold on % zadrzava istu sliku da bi naredna naredba crtanja (plot) novi
%signal prikazala na istoj slici.Aktivna je dok se ne pojavi hold off
plot(t,f_apr,'k','LineWidth',2)
grid
legend('x(t)','Furijeov red')
xlabel('t','FontSize',13);
axis([-1 9 -0.1 4.3]);%Matlab sam bira granice za x i y osu osim ako se
%ne zahteva naredbom axis drugacije.Slika ce prikazati signale od -1 do
% 9 po x osi, na opsegu od -0.1 do 4.3 po y osi

```

Kao dodatak komentarima priloženim u samom programu navešćemo vrednosti korišćenih promenljivih za slučaj $N = 3$. Vektor k je matrica kolona

$k =$

-3
-2
-1
0
1
2
3

Na početku programa se određuju koeficijenti C_k kao simboličke vrednosti. Kako u izračunavanju figuriše vektor k i ovaj će biti matrica kolona

$C_ksym =$

```
8 / (9 * pi ^ 2)
 2 / pi ^ 2
 8 / pi ^ 2
 4 / 3
 8 / pi ^ 2
 2 / pi ^ 2
8 / (9 * pi ^ 2)
```

U opštem slučaju koeficijenti C_k su kompleksni brojevi ali konkretno slučaju reč je o čisto realnim vrednostima što ukazuje na prisutnost samo kosinusnog reda jer je posmatrana funkcija parna (sinusni red je prisutan kada C_k poseduje i imaginarni deo).

U narednom koraku se ove simboličke vrednosti pretvaraju u brojne (izračunaju se prikazani izrazi) i smeštaju u vektor C_k , koji posle transponovanja (postaje matrica vrsta) ima vrednost

$C_k =$

```
0.0901    0.2026    0.8106    1.3333    0.8106    0.2026    0.0901
```

Prva 3 člana odgovaraju koeficijentima C_k za $k = -3, -2, -1$, centralni član vrednosti 1.3333 je C_0 , uvek realne vrednosti i odgovara srednjoj vrednosti signala a poslednja 3 člana su koeficijenti C_k za $k = 1, 2, 3$. Da napomenemo da važi da je $C_k = C_{-k}^*$, tj. međusobno su konjugovano kompleksni. U datom primeru su svi koeficijent realni pa su C_k i C_{-k} međusobno identični.

Da bi nacrtali aproksimacionu funkciju neophodno je izračunati vrednost Furijeovog reda za svaku vrednost t . U datom primeru vektor t je vrsta sa 1001 članom jer su granice -1 i 9 a korak 0.01. Praktično za svaku vrednost t treba odrediti vrednost

$$x_a(t) = \sum_{k=-N}^N C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.3)$$

Vidimo da za izračunavanje jedne vrednosti signala $x_a(t)$ treba sumirati proizvod odgovarajućih članova 2 vektora, C_k i $B_k = e^{jk\omega_0 t} = B_{k,t}$, konkretno na osnovu (3.3) je

$$\begin{aligned} x_a(t_1) &= C_{-3}B_{-3,t_1} + C_{-2}B_{-2,t_1} + C_{-1}B_{-1,t_1} + \cdots + C_3B_{3,t_1} \\ x_a(t_2) &= C_{-3}B_{-3,t_2} + C_{-2}B_{-2,t_2} + C_{-1}B_{-1,t_2} + \cdots + C_3B_{3,t_2} \\ &\dots \\ x_a(t_i) &= C_{-3}B_{-3,t_i} + C_{-2}B_{-2,t_i} + C_{-1}B_{-1,t_i} + \cdots + C_3B_{3,t_i} \\ &\dots \\ x_a(t_{1001}) &= C_{-3}B_{-3,t_{1001}} + C_{-2}B_{-2,t_{1001}} + C_{-1}B_{-1,t_{1001}} + \cdots + C_3B_{3,t_{1001}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Cilj je izbeći upotrebu for petlji što u slučaju MATLAB[®] -a značajno ubrzava izvršavanje programa i iskoristiti njegovu mogućnost lake manipulacije nad matricama.

Proizvod matrice vrste i matrice kolone je konstanta tj.

$$[C_1 \ C_2 \ C_3] \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3 \quad (3.5)$$

Koeficijenti C_k se koriste pri izračunavanju svake vrednosti signala $x_a(t)$ (za svako t). Da bi dobili vrednost funkcije x_a za sve vrednosti vektora t , vektor vrstu C_k pomnožićemo matricom čija se svaka kolona odnosi na jednu vrednost t_i . Praktično množimo 2 matrice

$$C_{(1 \times N)} * Matrica_{(N \times 1001)} = x_{(1 \times 1001)}$$

Na osnovu izraza (3.3) računa se

$$[C_{-N} \ C_{-N+1} \ \dots \ C_{N-1} \ C_N] \cdot \begin{bmatrix} e^{j(-N)\omega_0 t_1} & e^{j(-N)\omega_0 t_2} & \dots & e^{j(-N)\omega_0 t_{1001}} \\ e^{j(-N+1)\omega_0 t_1} & e^{j(-N+1)\omega_0 t_2} & \dots & e^{j(-N+1)\omega_0 t_{1001}} \\ e^{j(-N+2)\omega_0 t_1} & e^{j(-N+2)\omega_0 t_2} & \dots & e^{j(-N+2)\omega_0 t_{1001}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_0 t_1} & e^{j(N-1)\omega_0 t_2} & \dots & e^{j(N-1)\omega_0 t_{1001}} \\ e^{j(N)\omega_0 t_1} & e^{j(N)\omega_0 t_2} & \dots & e^{j(N)\omega_0 t_{1001}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Matrica iz izraza (3.6) odgovara promenljivoj Matrica u priloženom kodu MATLAB[®] programa. Dakle, kao rezultat ovog množenja dobija se vektor (matrica vrsta) dužine 1001, u programu obeležen sa `f_apr` a koji odgovara aproksimacionoj funkciji $x_a(t)$,

Kako je formirana matrica *Matrica*? Najjednostavniji pristup, primenjen u programu, svodi se na množenje matrice kolone (vektor k u programu) matricom vrstom (vektor t) tj.

$$k \cdot t = \begin{bmatrix} -N \\ -N+1 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{bmatrix}_{2N+1 \times 1} \cdot [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_{1000} \ t_{1001}]_{1 \times 1001} \quad (3.7)$$

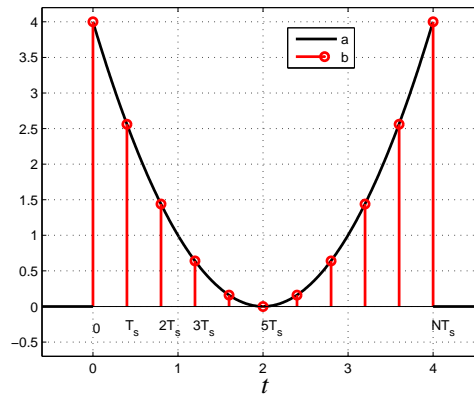
Rezultat ovog matičnog množenja je matrica

$$\begin{bmatrix} (-N)t_1 & (-N)t_2 & \dots & (-N)t_{1001} \\ (-N+1)t_1 & (-N+1)t_2 & \dots & (-N+1)t_{1001} \\ (-N+2)t_1 & (-N+2)t_2 & \dots & (-N+2)t_{1001} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (N-1)t_1 & (N-1)t_2 & \dots & (N-1)t_{1001} \\ (N)t_1 & (N)t_2 & \dots & (N)t_{1001} \end{bmatrix}_{2N+1 \times 1001} \quad (3.8)$$

koja pomnožena sa $j\omega_0$ predstavlja argument eksponencijalne funkcije i omogućava formiranje matrice iz izraza (3.6).

Pretpostavimo sada da je analogni signal prikazan na slici 3.8 odabran frekvencijom F_s . Odbirici se na vremenskoj osi nalaze na međusobnom rastojanju $T_s = 1/F_s$ i ima ih ukupno N , kao što je dato na slici 3.10.

Važi da je $x_d[k] = x((k-1)T_s)$ za vektore date u MATLAB[®] -u. U MATLAB[®] -u vektori imaju indeks koji kreće od jedinice (niz x ima članove $x[1], x[2], \dots, x[N]$) a prvi trenutak kada se kreće analiza signala je obelžen



Sl. 3.10: Analogni signal $x(t)$ a) i diskretni signal $x_d[n]$ dobijen njegovim odabiranjem b)

kao nulti. U izrazima ćemo za odбирke signala x koristiti oznake $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$ (ima ih ukupno N) a oni će u programima biti dati kao $x(1), x(2), \dots, x(N)$. Pri analizi spektra analognog signala koristili smo izraz 3.2

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.9)$$

Sada kada posedujemo odбирke signala $x(t)$ iskoristićemo izraz 3.9 uz malo prilagođavanje istog. Podsetimo se činjenice da će odgovarajuću Furijeov red dati periodičnu funkciju koja se poklapa sa polaznom funkcijom na osnovnoj periodi. Za takav pristup je osnovna perioda $T = 4s$ a na ovom intervalu je smešteno ukupno N odбирaka, odnosno može se reći da je $T = NT_s$. Kako je dobijen diskretni signal u izrazu (3.9) integral će biti zamenjen sumom tako da se dobija

$$\frac{1}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} x_d[i] e^{-jk\omega_0 (iT_s)} = \frac{1}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} x_d[i] e^{-jk \frac{2\pi}{NT_s} (iT_s)} \quad (3.10)$$

uzevši u obzir da je diskretizovana vremenska osa pa je sad t zamenjeno sa iT_s , gde je i ceo broj. Koeficijentima C_k koji odgovaraju analognom signalu odgovaraju koeficijenti c_k

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_d[i] e^{-jki \frac{2\pi}{N}} \quad (3.11)$$

Izraz je nastao na osnovu (3.10) eliminacijom T_s ispred sume jer je perioda (T u sekundama, kod analognog signala) diskretnog signala data celim brojem N posle koga se signal ponavlja. Dakle možemo reći da na neki način koeficijenti c_k ukazuju na spektralni sadržaj signala x_d .

Po definiciji koeficijenti diskretne Furijeove transformacije signala x dobijaju se iz izraza

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jmn \frac{2\pi}{N}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.12)$$

i vidimo da odgovaraju skaliranim vrednostima koeficijenata c_k pomnoženim sa N - dužinom sekvence. Inverzna diskretna Furijeova transformacija omogućava rekonstrukciju signala iz frekvencijskog domena

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{jmn \frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.13)$$

Treba primetiti da član $e^{-jmn\frac{2\pi}{N}}$ (ovo je formula koja predstavlja kompleksne brojeve koji se nalaze na jediničnom krugu, jer je moduo uvek jednak jedinici a pod uglom $2\pi mn/N$ u odnosu na pozitivni deo x ose) se svodi na $\cos(mn\frac{2\pi}{N}) + j\sin(mn\frac{2\pi}{N})$, gde su m, n i N celi brojevi. Sinusna i kosinusna funkcija su periodične sa periodom 2π . Najmanji korak je $2\pi/N$ tako da na jediničnom krugu (ugao se kreće od 0 do 2π) postoji tačno N ekvidistantnih različitih vredosti. Analizom preslikavanja s ravni u z ravan videli smo da se frekvencijska osa ($j\omega$ osa) preslikava tačno na jedinični krug. Tačnije odsečak $j\omega$ ose koji odgovara frekvencijama $[-F_s/2, F_s/2]$ se preslikava na ceo jedinični krug. Uobičajeno je da se analogni signal najpre filtrira niskofrekventnim filtrom kako bi se ograničio spektar signala. U narednom koraku se radi analogno digitalna konverzija pri čemu frekvencija odabiranja treba da bude bar dvostruko veća od maksimalne frekvencije u spektru signala. U z ravni, tački $\omega = 0$ iz s ravni odgovara tačka $z = e^{j0} = 1$, dok se tačka $\omega_s/2 = 2\pi f_s/2 = \pi f_s$ preslikava u $z = e^{j\pi} = -1$. Diskretna Furijeova transformacija se u MATLAB[®] -u izračunava naredbom `fft`. Naziv je nastao od izraza *Fast Fourier Transform* tj. reče je o brzom Furijeovoj transformaciji. Brza Furijeova transformacija nije neka nova transformacija, već je reč o brzom algoritmu za izračunavanje diskretne Furijeove transformacije. Izračunavanje se svodi na upotrebu množenja i sabiranja te lako može biti implementirano na bilo kom procesoru.

Zadatak 41 Izračunati diskretnu Furijeovu transformaciju signala $x = \{1, 2, 3, -2, 0, 4, 1\}$ i nacrtati amplitudski i fazni spektar.

Rešenje:

Signal x ima dužinu $N = 7$, gde je $x[0] = 1, x[1] = 2, \dots, x[6] = 1$. Na osnovu izraza (3.12) za $m = 0$ dobija se član X_0

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jmn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-j0} = x[0] + x[1] + x[2] + \dots + x[6] \\ &= 1 + 2 + 3 + (-2) + 0 + 4 + 1 = 9 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Bez obzira na dužinu N i vrednosti članova niza x , X_0 se uvek dobija kao prosta suma svih članova niza x , tako da je uvek reč o realnoj vrednosti a koja je srazmerna vrednosti DC komponente signala x .

Za $m = 1$ se dobija

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-jn\frac{2\pi}{7}} = x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{7}} + x[2]e^{-j2\frac{2\pi}{7}} + \dots + x[6]e^{-j6\frac{2\pi}{7}} \\ &= 1 + 2(\cos(\frac{2\pi}{7}) - j\sin(\frac{2\pi}{7})) + 3(\cos(\frac{4\pi}{7}) - j\sin(\frac{4\pi}{7})) \\ &\quad - 2(\cos(\frac{6\pi}{7}) - j\sin(\frac{6\pi}{7})) + 4(\cos(\frac{10\pi}{7}) - j\sin(\frac{10\pi}{7})) + (\cos(\frac{12\pi}{7}) - j\sin(\frac{12\pi}{7})) \\ &= 1 + 2(0.6235 - j0.7818) + 3(-0.2225 - j0.9749) - 2(-0.9010 - j0.4339) \\ &\quad + 4(-0.2225 + j0.9749) + (0.6235 + j0.7818) \\ &= 3.1148 + j1.0609 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Za $m = 2$

$$\begin{aligned} X_2 &= \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-j2n\frac{2\pi}{7}} = x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j\frac{4\pi}{7}} + x[2]e^{-j\frac{8\pi}{7}} + \dots + x[6]e^{-j\frac{24\pi}{7}} \\ &= 1 + 2(-0.2225 - j0.9749) + 3(-0.9010 + j0.4339) - 2(0.6235 + j0.7818) \\ &\quad + 4(-0.9010 - j0.4339) + (-0.2225 + j0.9749) \\ &= -7.2213 - j2.9725 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Za $m = 3$

$$\begin{aligned}
X_3 &= \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-j3n\frac{2\pi}{7}} = e^{-j0} + 2e^{-j\frac{6\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{12\pi}{7}} \\
&\quad + (-2)e^{-j\frac{18\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{30\pi}{7}} + e^{-j\frac{36\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(-0.9010 - j0.4339) + 3(0.6235 + j0.7818) - 2(-0.2225 - j0.9749) \\
&\quad + 4(0.6235 - j0.7818) + (-0.9010 + j0.4339) \\
&= 3.1066 + j0.7341
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Za $m = 4$

$$\begin{aligned}
X_4 &= \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-j4n\frac{2\pi}{7}} = e^{-j0} + 2e^{-j\frac{8\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{16\pi}{7}} \\
&\quad + (-2)e^{-j\frac{24\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{40\pi}{7}} + e^{-j\frac{48\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(-0.9010 + j0.4339) + 3(0.6235 - j0.7818) - 2(-0.2225 + j0.9749) \\
&\quad + 4(0.6235 + j0.7818) + (-0.9010 - j0.4339) \\
&= 3.1066 - j0.7341
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Za $m = 5$

$$\begin{aligned}
X_5 &= \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-j5n\frac{2\pi}{7}} = e^{-j0} + 2e^{-j\frac{10\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{20\pi}{7}} \\
&\quad + (-2)e^{-j\frac{30\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{50\pi}{7}} + e^{-j\frac{60\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(-0.2225 + j0.9749) + 3(-0.9010 - j0.4339) - 2(0.6235 - j0.7818) \\
&\quad + 4(-0.9010 + j0.4339) + (-0.2225 - j0.9749) \\
&= 3.1066 - j0.7341
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Poslednji član za $m = 6$ ima vrednost

$$\begin{aligned}
X_6 &= \sum_{n=0}^6 x[n]e^{-j6n\frac{2\pi}{7}} = e^{-j0} + 2e^{-j\frac{12\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{24\pi}{7}} \\
&\quad + (-2)e^{-j\frac{36\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{60\pi}{7}} + e^{-j\frac{72\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(0.6235 + j0.7818) + 3(-0.2225 + j0.9749) - 2(-0.9010 + j0.4339) \\
&\quad + 4(-0.2225 - j0.9749) + (0.6235 - j0.7818) \\
&= 3.1148 - j1.0609
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Svi koeficijenti diskretne Furijeove transformacije su dati u tabeli 3.1.

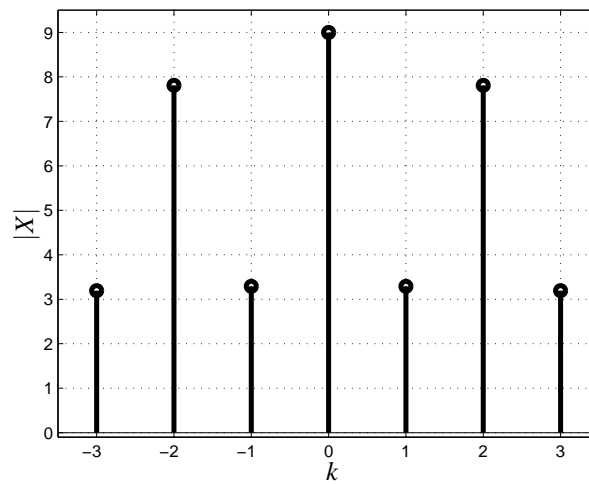
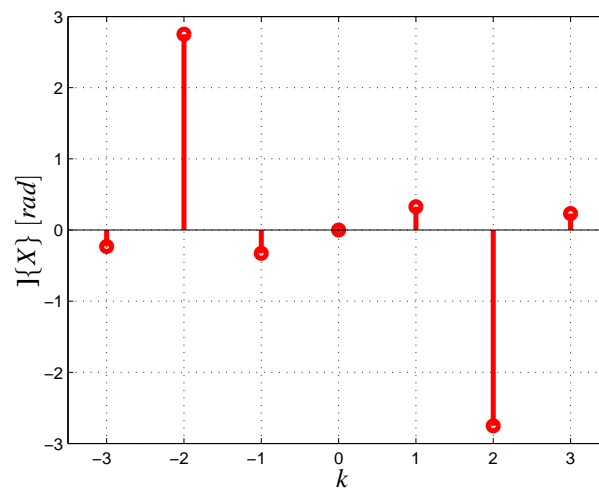
Amplitudski i fazni spektar prikazani su na slikama 3.11 i 3.12, respektivno.

Da objasnimo dobijeni rezultat. Poznato je da je spektar periodičnog analognog signala diskretan. Na grafiku spektra na x osi se nalazi frekvencija (predstavljena rednim brojem harmonika). Razmak između dve susedne komponente diskretnog spektra iznosi $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$, gde T predstavlja periodu signala. Spektar je diskretan ali poseduje beskonačno puno harmonika tj. na grafiku se frekvenzijska osa prostire od 0 do ∞ , nezavisno od toga što je spektar bogatiji nan niskim frekvencijama tj. iznad neke frekvencije komponente spektra (harmonici) imaju vrednost blisku nuli. Aperiodični analogni signal može da se posmatra kao specijalni slučaj periodičnog signala čija perioda $T \rightarrow \infty$. U tom slučaju razmak između dva harmonika $\omega_0 = 2\pi/T$ teži nuli tako da aperiodični signal ima kontinualni spektar.

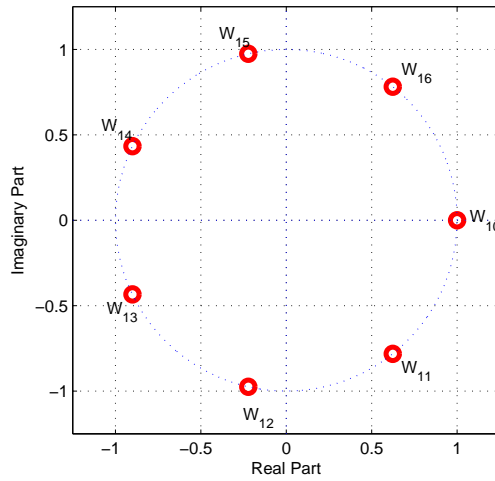
Kada je u pitanju diskretni signal, posmatranjem izraza za diskretnu Furijeovu transformaciju (3.12), vidimo da je spektar diskretan jer se na frekvenzijskoj osi (koja je se sada nalazi na jediničnom krugu) ko-

Tab. 3.1: Koeficijenti diskretne Furijeove transformacije X_k

k	X_k	$ X_k $	$\angle\{X_k\} [rad]$
0	$9+j0$	9	0
1	$3.1148 + j1.0609$	3.2905	0.3283
2	$-7.2213 - j2.9725$	7.8092	-2.7511
3	$3.1066 + j0.7341$	3.1921	0.2321
4	$3.1066 - 0.7341$	3.1921	-0.2321
5	$-7.2213 + 2.9725$	7.8092	2.7511
6	$3.1148 - 1.0609$	3.2905	-0.3283

Sl. 3.11: Amplitudski spektar signala x Sl. 3.12: Fazni spektar signala x

riste samo tačke koje su pod uglom koji je celobrojni umnožak vrednosti $2\pi/N$ gde N predstavlja dužinu niza x , kako je prikazano na slici 3.13.



Sl. 3.13:

Zato je najbolje pre izračunavanja diskretne Furijeove transformacije niza x dužine N , izračunati sve vrednosti W_{ij} (ima ih N). U konkretnom slučaju one iznose

$$\begin{aligned}
 W_{10} &= 1 + j0 \\
 W_{11} &= 0.6235 - j0.7818 \\
 W_{12} &= -0.2225 - j0.9749 \\
 W_{13} &= -0.9010 - j0.4339 \\
 W_{14} &= -0.9010 + j0.4339 \\
 W_{15} &= -0.2225 + j0.9749 \\
 W_{16} &= 0.6235 + j0.7818
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

i poređane su na jediničnom krugu u smeru kazaljke na časovniku (negativni smer) jer je argument eksponencijalne funkcije negativan. Izraz (3.12) napisaćemo u funkciji promenljive W_{ij} kao

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jmn \frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{mn} \quad , m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{3.22}$$

tako da se za $m = 1$ dobija

$$X_1 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{mn} = x[0]W_{10} + x[1]W_{11} + x[2]W_{12} + x[3]W_{13} + x[4]W_{14} + x[5]W_{15} + x[6]W_{16} \tag{3.23}$$

gde je ugao između dva susedna parametra W vrednosti $2\pi/7$, kao na slici 3.13.

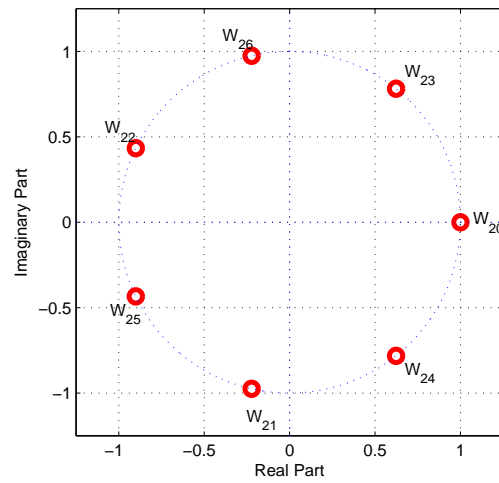
X_2 se određuje na osnovu sledećeg izraza

$$X_2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{mn} = x[0]W_{20} + x[1]W_{21} + x[2]W_{22} + x[3]W_{23} + x[4]W_{24} + x[5]W_{25} + x[6]W_{26} \tag{3.24}$$

a vrednosti W parametara su prikazane na slici 3.14. Dakle opet koristimo istih 7 vrednosti samo je ugao između dve susedne vrednosti sada $4\pi/7$.

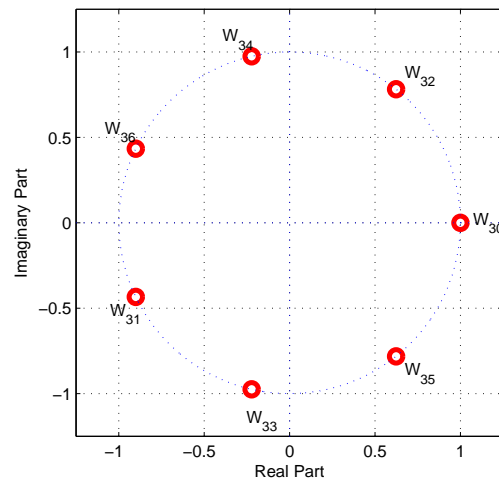
Slično je

$$X_3 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{mn} = x[0]W_{30} + x[1]W_{31} + x[2]W_{32} + x[3]W_{33} + x[4]W_{34} + x[5]W_{35} + x[6]W_{36} \tag{3.25}$$



Sl. 3.14:

a slika 3.15 pokazuje poziciju W parametara



Sl. 3.15:

Gornja polovina jediničnog kruga odgovara pozitivnim frekvencijama a donja polovina negativnim. Kada je dužina niza kao u ovom primeru neparan broj N , s obzirom da je prva tačka uvek na lokaciji $z = 1$, što odgovara frekvenciji 0, ostaje po $(N - 1)/2$ tačaka na pozitivnim tj na negativnim frekvencijama. Realni nizovi imaju amplitudski spektar koji je parna funkcija što je posledica činjenice da su $X_1 = X_6^*$, $X_2 = X_5^*$ i $X_3 = X_4^*$ komponente na frekvencijama suprotnog znaka međusobno konjugovano kompleksne. Dakle, treba izračunati X_0 koji opisuje DC komponentu i još $(N - 1)/2$ komponenti koje opisuju pozitivne frekvencije a komponente na negativnim frekvencijama imaju konjugovano kompleksne vrednosti.

Dakle, diskretni signal ima diskretni spektar određen brzom Furijeovom transformacijom. Za razliku od spektra periodičnog analognog signala koji ima beskonačnom komponenti spektar diskretnog signala dužine N ima tačno $(N + 1)/2$ komponenti (uključujući i DC komponentu). Sa slika 3.13, 3.14 i 3.15 vidimo da ne posedujemo informaciju (kada je niz x neparne dužine) o komponenti signala na frekvenciji $F_s/2$ jer njoj odgovara ugao π , tj. u z ravni se nalazi na lokaciji $z = -1$ a nijedna W_{ij} tačka se ne nalazi na toj lokaciji.

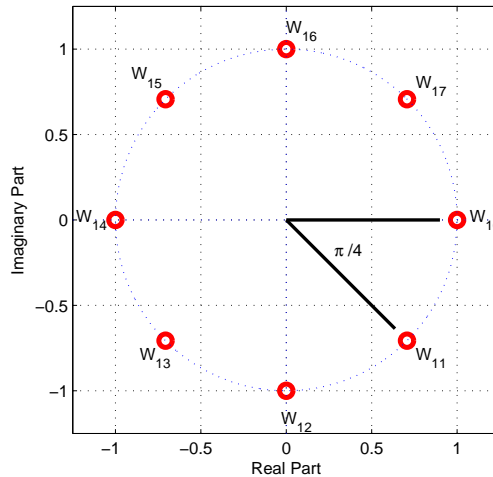
Drugim rečima, spektar diskretnog signala ima komponente na frekvencijama iz opsega $[0, F_s/2]$. Broj komponenti na ovom opsegu je fiksiran na $(N+1)/2$. Dakle frekvencijska rezolucija (razmak između dve susedne komponente) zavisi od dužine niza N . Za veće N treba izračunati više komponenti X_k , što zahteva izračunavanje više množenja i sabiranja ali sa druge strane dobijamo bolju informaciju o spektru signala (na više frekvencija znamo kakav je sadržaj tj. povećali smo frekvencijsku rezoluciju). U praksi se dešava da signal koji prikupljamo sa senzora ima ograničeno trajanje (npr. zemljotres) a samim tim za fiksiranu frekvenciju odabiranja posedujemo ograničen broj odbiraka a taj broj definiše frekvencijsku rezoluciju. Jedini način da povećamo frekvencijsku rezoluciju je da niz x proširimo na željenu dužinu nulama (ili odbircima samog signala x) i da za tu proširenu verziju niza izračunamo diskretnu Furijeovu transformaciju.

Zadatak 42 Izračunati diskretnu Furijeovu transformaciju i nacrtati amplitudski i fazni spektar signala $y = \{1, 2, 3, -1, -2, -3, 0, -2\}$.

Rešenje : Signal y ima dužinu $N = 8$. U frekvencijskom domenu je na osnovu izraza (3.12) predstavljen sa

$$Y_m = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-jmn \frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^7 y[n] e^{-jmn \frac{\pi}{4}} \quad , m = 0, 1, 2, \dots, 7 \quad (3.26)$$

Kako su m i n iz skupa celih brojeva susedne komponente na jediničnom krugu $e^{-jmn \frac{\pi}{4}}$ su međusobno udaljene za ugao $\pi/4$, kako je prikazano na slici 3.16.



Sl. 3.16:

Na osnovu izraza (3.26) za $m = 0$ dobija se član Y_0

$$\begin{aligned} Y_0 &= \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-jmn \frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^7 y[n] e^{-j0} = y[0] + y[1] + y[2] + \dots + y[7] \\ &= 1 + 2 + 3 + (-1) + (-2) + (-3) + 0 + (-2) = -2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

koji ukazuje na DC komponentu signala y .

Za $m = 1$ se dobija

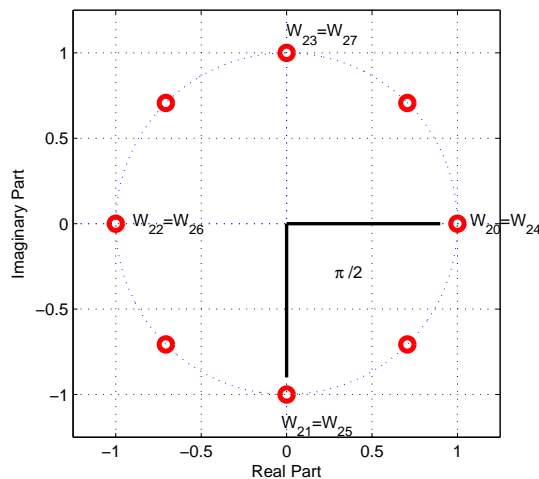
$$\begin{aligned}
Y_1 &= \sum_{n=0}^7 y[n]e^{-jn\frac{2\pi}{8}} = y[0]e^{-j0} + y[1]e^{-j\frac{2\pi}{8}} + y[2]e^{-j2\frac{2\pi}{8}} + \dots + y[7]e^{-j7\frac{2\pi}{8}} \\
&= 1 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3(-j) + (-1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-2)(-1) \\
&\quad + (-3)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0(j) + (-2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 5.8284 - j7.2426
\end{aligned} \tag{3.28}$$

U prethodnom primeru smo videli da izraz (3.28) može biti dat u obliku

$$Y_1 = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]W_{mn} = y[0]W_{10} + y[1]W_{11} + y[2]W_{12} + \dots + y[6]W_{16} + y[7]W_{17} \tag{3.29}$$

gde parametri W_{1n} prikazani na slici 3.16 a razmak između dva susedna člana iznosi $\pi/4$ i imaju vrednost

$$\begin{aligned}
W_{10} &= 1 + j0 \\
W_{11} &= 0.7071 - j0.7071 = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \\
W_{12} &= 0 - j = -j \\
W_{13} &= -0.7071 - j0.7071 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \\
W_{14} &= -1 + j0 = -1 \\
W_{15} &= -0.7071 + j0.7071 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\
W_{16} &= 0 + j = j \\
W_{17} &= 0.7071 + j0.7071 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned} \tag{3.30}$$



Sl. 3.17:

Za $m = 2$ izračunavamo

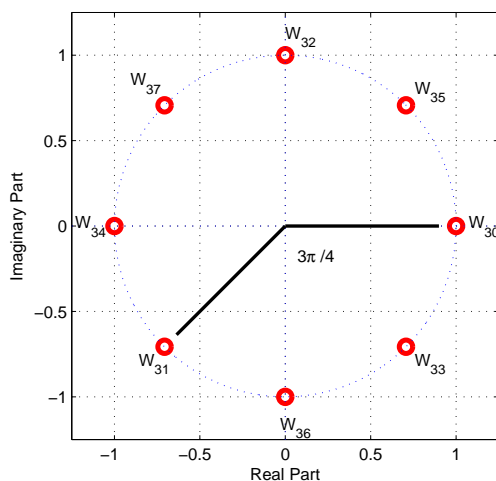
$$\begin{aligned}
Y_2 &= \sum_{n=0}^7 y[n]e^{-j2n\frac{2\pi}{8}} = y[0]e^{-j0} + y[1]e^{-j2\frac{2\pi}{8}} + y[2]e^{-j4\frac{2\pi}{8}} + \dots + y[7]e^{-j14\frac{2\pi}{8}} \\
&= y[0]W_{20} + y[1]W_{21} + y[2]W_{22} + \dots + y[6]W_{26} + y[7]W_{27} \\
&= 1 + 2(-j) + 3(-1) + (-1)(j) + (-2)(1) + (-3)(-j) + 0(-1) + (-2)(j) \\
&= -4 - j2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

pri čemu se susedne komponente niza W_{2n} nalaze pod uglom od $\pi/2$ radijana, kako je pokazano na slici 3.17.

Za $m = 3$ se dobija

$$\begin{aligned}
 Y_3 &= \sum_{n=0}^7 y[n]e^{-j3n\frac{2\pi}{8}} = y[0]e^{-j0} + y[1]e^{-j3\frac{2\pi}{8}} + y[2]e^{-j6\frac{2\pi}{8}} + \dots + y[7]e^{-j21\frac{2\pi}{8}} \\
 &= y[0]W_{30} + y[1]W_{31} + y[2]W_{32} + \dots + y[6]W_{36} + y[7]W_{37} \\
 &= 1 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3(j) + (-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-2)(-1) \\
 &\quad + (-3)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0(-j) + (-2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= 0.1716 - j1.2426
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

pri čemu se susedne komponente niza W_{3n} nalaze pod uglom od $3\pi/4$ radijana, kako je pokazano na slici 3.18.



Sl. 3.18:

Za $m = 4$ računamo poslednji koeficijent koji se mora odrediti po definiciji kao

$$\begin{aligned}
 Y_4 &= \sum_{n=0}^7 y[n]e^{-j4n\frac{2\pi}{8}} = y[0]e^{-j0} + y[1]e^{-j4\frac{2\pi}{8}} + y[2]e^{-j8\frac{2\pi}{8}} + \dots + y[7]e^{-j28\frac{2\pi}{8}} \\
 &= y[0]W_{40} + y[1]W_{41} + y[2]W_{42} + \dots + y[6]W_{46} + y[7]W_{47} \\
 &= 1 + 2(-1) + 3(1) + (-1)(-1) + (-2)(1) + (-3)(-1) + 0(1) + (-2)(-1) \\
 &= 6 + j0 = 6
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

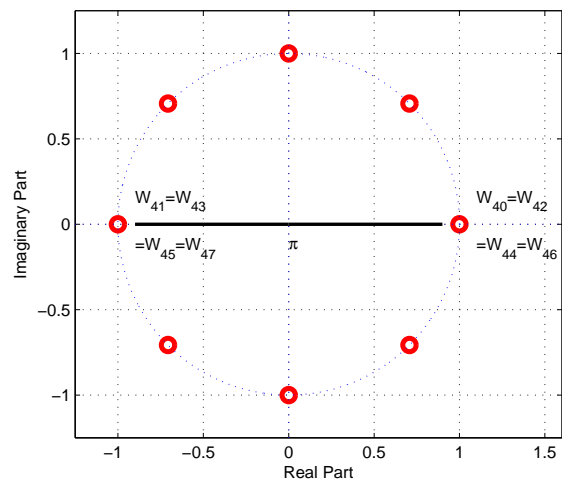
pri čemu se susedne komponente niza W_{4n} nalaze pod uglom od π radijana, kako je pokazano na slici 3.19.

Za koeficijente koji odgovaraju negativnim frekvencijama važi

$$\begin{aligned}
 Y_5 &= Y_3^* = 0.1716 + j1.2426 \\
 Y_6 &= Y_2^* = -4 + j2 \\
 Y_7 &= Y_1^* = 5.8284 + j7.2426
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Svi članovi diskretne Furijeove transformacije prikazani su u tabeli 3.2

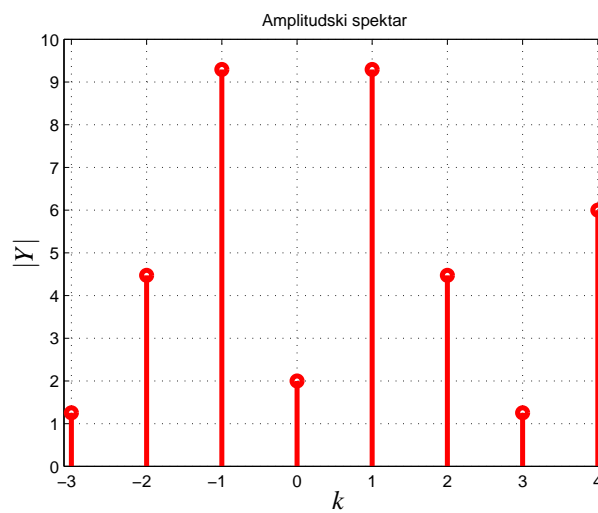
Amplitudski i fazni spektar prikazani su na slikama 3.20 i 3.21, respektivno.

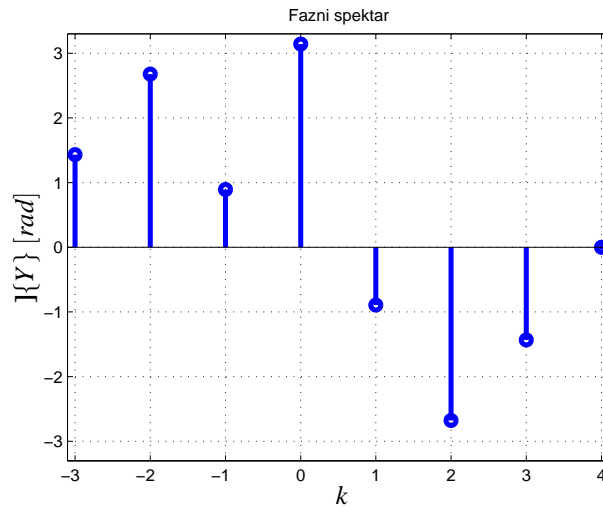


Sl. 3.19:

Tab. 3.2: Koeficijenti diskretne Furijeove transformacije Y_k

k	Y_k	$ Y_k $	$\angle\{Y_k\} [rad]$
0	$-2+j0$	2	3.1416
1	$5.8284 - j7.2426$	9.2966	-0.8932
2	$-4.0000 - j2$	4.4721	-2.6779
3	$0.1716 - j1.2426$	1.2544	-1.4336
4	$6+j0$	6	0
5	$0.1716 + j1.2426$	1.2544	1.4336
6	$-4+j2$	4.4721	2.6779
7	$5.8284 + j7.2426$	9.2966	0.8932

Sl. 3.20: Amplitudski spektar signala y



Sl. 3.21: Fazni spektar signala y

Dakle kada niz ima dužinu N koja je parni broj, treba odrediti $(N+2)/2$ članova diskretne Furijeove transformacije koji odgovaraju pozitivnim frekvencijama. Preostalih $(N-2)/2$ članova su konjugovano kompleksne vrednosti odgovarajućih članova sa iste ali pozitivne frekvencije. Za parno N imamo i podatak o spektralnom sadržaju na frekvenciji $F_s/2$ i to je vrednost $Y_{N/2}$, što nije bio slučaj kod niza neparne dužine.

S obzirom na veliki značaj diskretne Furijeove transformacije u obradi digitalnih signala, DSP (*Digital Signal Processing*) toolbox sadrži naredbu `fft` za njeno izračunavanje. Izračunavanje i crtanje spektra signala iz zadatka 42 je izvedeno MATLAB[®] programom

```

y=[1 2 3 -1 -2 -3 0 -2]';
Y=fft(y)
ampY=abs([Y(6:8);Y(1:5)]);
fazY=angle([Y(6:8);Y(1:5)]);
figure
stem([-3:4],ampY,'r','LineWidth',3)
grid
xlabel('k')
ylabel('amp')
title('Amplitudski spektar')
axis([-3.1 4.1 0 10])
figure
stem([-3:4],fazY,'b','LineWidth',3)
grid
xlabel('k')
ylabel('faz')
title('Fazni spektar')
axis([-3.1 4.1 -3.3 3.3])

```

Niz y iz vremenskog domena u frekvencijskom domenu je predstavljen nizom Y . Kako je dužina niza $N = 8$, prvih 5 odbiraka odgovara pozitivnim a preostala 3 negativnim frekvencijama. Rezultat ima sledeći izgled

$Y =$

$$-2.0000 + 0.0000i$$

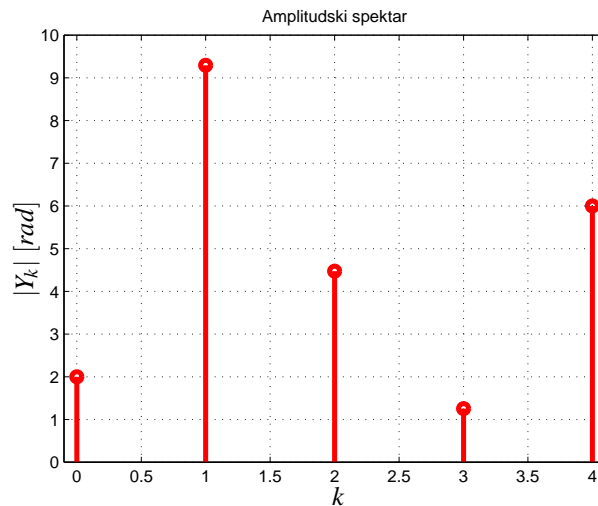

```

5.8284 - 7.2426i
-4.0000 - 2.0000i
0.1716 - 1.2426i
6.0000 + 0.0000i
0.1716 + 1.2426i
-4.0000 + 2.0000i
5.8284 + 7.2426i

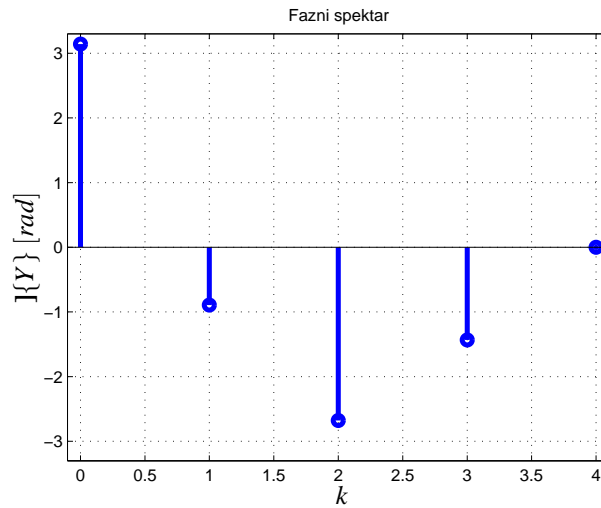
```

Amplitudski spektar signala je parna funkcija ($f(-k) = f(k)$), što za ovaj vektor nije zadovoljeno jer su podaci vezani za negativne frekvencije smešteni u članovima $Y(5), Y(6)$ i $Y(7)$. Da se to prevaziđe ubačena je naredba `ampY=abs([Y(6:8);Y(1:5)])`. Svi vektori (nizovi) u MATLAB[®]-u imaju elemente čiji indeks kreće od 1, pa je kod crtanja spektra formiran vektor koji se odnosi na indeks (od -3 do 4, ukupno 8. Ako ćemo biti matematički precizni ovo i nije parna funkcija jer imamo član $Y(4)$ na pozitivnoj frekvenciji koji nema parnjaka na negativnoj frekvenciji. Za $N = 7$, tj. za nizove neparne dužine amplitudski spektar je zaista parna funkcija jer poseduje simetriju odnosno indeks k je u opsegu $[-3, 3]$).

Kako negativne frekvencije realno ne postoje, dovoljno je crtati samo spektar na pozitivnim frekvencijama. Za niz y iz zadatka 42 amplitudski spektar može biti dat u obliku kao na slici 3.22. Podrazumeva se da je fazni spektar neparna funkcija tako da i on može biti prikazan samo na pozitivnim frekvencijama kao na slici 3.23



Sl. 3.22: Amplitudski spektar signala y



Sl. 3.23: Fazni spektar signala y

3.1 Diskretna Furijeova transformacija i konvolucija

Linearna konvolucija signala x dužine N i signala y dužine M je signal $g = x * y$ dužine $N + M - 1$. U poglavlju xxx (radjeno ranije na casu i bice uneseno u zbirku) je pokazano kako se linearna konvolucija izracunava u vremenskom domenu. Kao i kod analognih signala gde se konvolucija u frekvencijskom domenu (primenom Laplasove transformacije) svodila na mnozenje, i u slucaju digitalnih (diskretnih) signala konvolucija posle primene diskretne Furijeove transformacije se svodi na mnozenje. Naredba `fft` kao izlaz daje niz koji je iste duzine kao i ulazni signal. Za mnozenje vektora $x[i], i = 1, 2, \dots, N$ i $y[i], i = 1, 2, \dots, M$ je potrebno da oni budu iste duzine. Dakle, kako znamo da resenje predstavlja niz duzine $M + N - 1$, oba ulazna signala ce najpre biti produzena nulama na ovu duzinu, formiranjem nizova $x_p[i]$ i $y_p[i]$.

$$x_p[i] = \begin{cases} x[i] & \text{za } i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{za } i = N, N+1, \dots, N+M-2 \end{cases} \quad (3.35)$$

$$y_p[i] = \begin{cases} y[i] & \text{za } i = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0 & \text{za } i = M, M+1, \dots, N+M-2 \end{cases} \quad (3.36)$$

U drugoj fazi se odreduje diskretna Furijeova transformacija oba niza.

$$\begin{aligned} X_p &= \mathcal{F}\{x_p[k]\} \\ Y_p &= \mathcal{F}\{y_p[k]\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sledi mnozenje dva vektora (nije rec o matricnom mnozenju, vec je rec o medusobnom mnozenju odgovarajucih clanova, sto se u MATLAB[®]-u izvodi naredbom `*`).

$$G = X_p \cdot Y_p \quad (3.38)$$

koje daje vrednost konvolucije u frekvencijskom domenu. Vrednost konvolucije u vremenskom domenu dobijamo inverznom diskretnom Furijeovom transformacijom.

$$g[k] = \mathcal{F}^{-1}\{G\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N+M-1 \quad (3.39)$$

Zadatak 43 Koristeći MATLAB[®] odrediti konvoluciju signala $x = \{1, 2, 3, 5\}$ i $y = \{2, 4, 6\}$.

Rešenje :

Konvolucija je po gore opisanom postupku određena programom

```
x=[1 2 3 5]      %N=4
y=[2 4 6]       %M=3
x_p=[x 0 0]     % prosiren niz x
y_p=[y 0 0 0]  % prosiren niz y
X_p=fft(x_p)    Y_p=fft(y_p)
G=X_p.*Y_p      % mnozenje svaki sa svakim
g=ifft(G)       % inverzna fft
```

koji kao rezultat daje

x =

1 2 3 5

y =

2 4 6

x_p =

1 2 3 5 0 0

y_p =

2 4 6 0 0 0

X_p =

Columns 1 through 4

11.0000 + 0.0000i -4.5000 - 4.3301i 3.5000 + 0.8660i -3.0000 + 0.0000i

Columns 5 through 6

3.5000 - 0.8660i -4.5000 + 4.3301i

Y_p =

Columns 1 through 4

12.0000 + 0.0000i 1.0000 - 8.6603i -3.0000 + 1.7321i 4.0000 + 0.0000i

Columns 5 through 6

-3.0000 - 1.7321i 1.0000 + 8.6603i

G =

1.0e+02 *

Columns 1 through 4

1.3200 + 0.0000i -0.4200 + 0.3464i -0.1200 + 0.0346i -0.1200 + 0.0000i

Columns 5 through 6

-0.1200 - 0.0346i -0.4200 - 0.3464i

g =

2.0000 8.0000 20.0000 34.0000 38.0000 30.0000

Proverićemo rezultat izračunavanjem u vremenskom domenu naredbom CONV.

```
x=[1 2 3 5] %N=4
y=[2 4 6] %M=3
g=conv(x,y)
```

što daje

x =

1 2 3 5

y =

2 4 6

g =

2 8 20 34 38 30

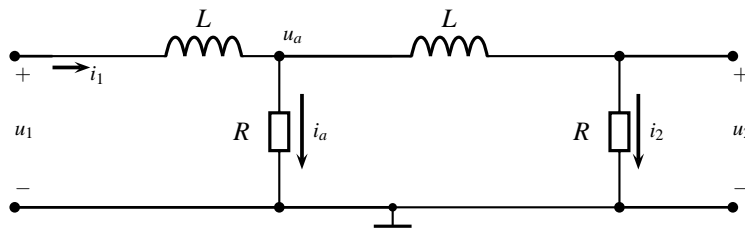
4

Kontinualno-diskretne transformacije

1. Za kolo sa slike 4.1 odrediti prenosnu funkciju $G = \frac{u_2}{u_1}$ u z domenu i simulirati kolo sa slike:

- (a) Transformacijom izvoda
- (b) Impulsno-invarijantnom transformacijom
- (c) Bilinearnom transformacijom;

ako je $T = 0.1$ s i $L/R = 2$ s.



Sl. 4.1:

Rešenje:

Kolo rešavamo primenom Laplasove transformacije, u frekvenzijskom domenu. Usvojicemo označavanje da npr. promenljivoj $u_1(t)$ u vremenskom domenu odgovara $U_1(s)$ u frekvenzijskom domenu. Kroz otpornik R i kalem L u desnom delu kola teče ista struja i_2 , tj. važi

$$I_2(s) = \frac{U_2(s)}{R} = \frac{U_a(s) - U_2(s)}{sL} \quad (4.1)$$

$$U_2(s) sL = RU_a(s) - RU_2(s)$$

$$U_2(s) (sL + R) = RU_a(s)$$

$$U_a(s) = U_2(s) \frac{R + sL}{R} \quad (4.2)$$

Struja kroz otpornik ima vrednost

$$I_a(s) = \frac{U_a(s)}{R} \quad (4.3)$$

dok se struja na ulaznom delu kola može odrediti iz izraza

$$I_1(s) = \frac{U_1(s) - U_a(s)}{sL} \quad (4.4)$$

Na osnovu prvog Kirhofovog zakona za centralni čvor važi

$$I_1(s) = I_a(s) + I_2(s) \quad (4.5)$$

što dato preko ulaznog i izlaznog napona poprima oblik

$$\frac{U_1(s) - U_a(s)}{sL} = \frac{U_a(s)}{R} + \frac{U_a(s) - U_2(s)}{sL} \quad (4.6)$$

Levu i desnu stranu izraza (4.6) množimo sa sRL

$$RU_1(s) - RU_a(s) = sLU_a(s) + RU_a(s) - RU_2(s)$$

Sređivanjem ovog izraza i smenom $U_a(s)$ na osnovu (4.2) se dobija

$$RU_1(s) + RU_2(s) = (2R + sL)U_2(s) \frac{R + sL}{R} \quad (4.7)$$

Izraz (4.7) množimo sa R

$$R^2U_1(s) + R^2U_2(s) = U_2(s) (2R^2 + 2sRL + RsL + s^2L^2) \quad (4.8)$$

čime se dobija

$$R^2U_1(s) = U_2(s) (R^2 + 3sRL + s^2L^2) \quad (4.9)$$

Prenosna funkcija analognom kola (odnos izlaznog i ulaznog napona, praktično je reč o naponskom pojačanju) je data izrazom

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R^2}{R^2 + 3sRL + s^2L^2} = \frac{1}{1 + 3s\frac{L}{R} + s^2\frac{L^2}{R^2}}$$

odnosno, uzevši u obzir date vrednosti parametara kola, dobija se

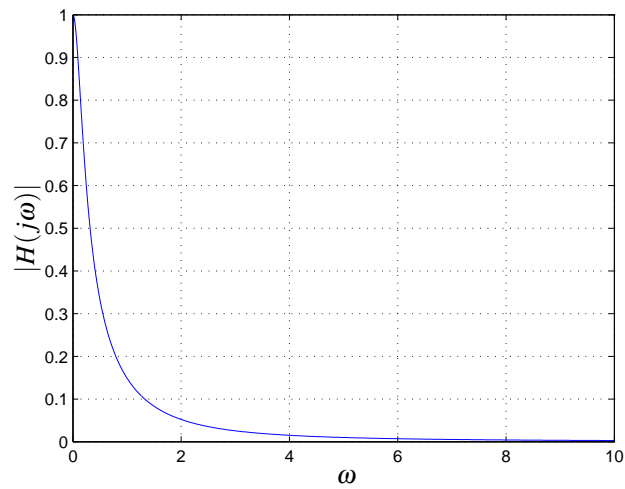
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + 6s + 4s^2} \quad (4.10)$$

Amplitudska karakteristika ovog sistema prikazana je na slici 4.2.

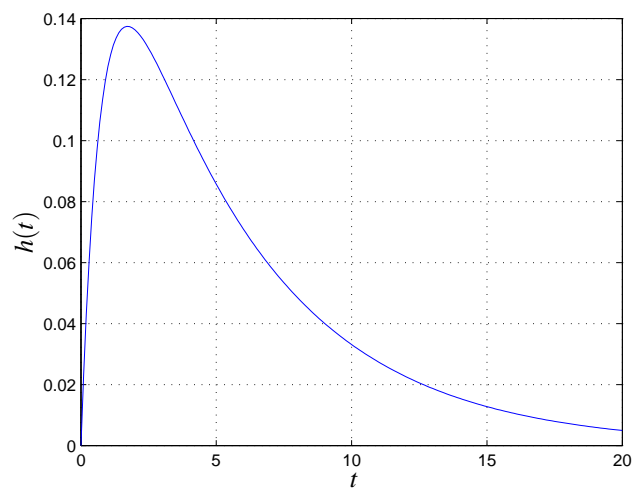
Impulsni odziv ovog sistema prikazan je na slici 4.3. Diskretne mreže mogu imati beskonačni impulsni odziv -IIR (rekurzivni) ili konačni impulsni odziv - FIR (nerekurzivni). FIR sistemi se projektuju direktno u z domenu i ne mogu biti dobijeni transformacijama krenuvši od prenosne funkcije nekog analognog sistema. Primenom analogno-diskretnog preslikavanja prenosna funkcija analogne mreže se preslikava u odgovarajuću IIR prenosnu funkciju. Praktično se kompleksna s ravan preslikava u kompleksnu z ravan.

Preslikavanje iz kontinualnog prostora (s ravan) u diskretni prostor (z ravan) treba da ispuni određene zahteve:

- Imaginarna osa ($j\omega$ osa) iz s ravni se preslikava na jedinični krug u z ravni.
- Leva s -poluravan se preslikava u unutrašnjost jediničnog kruga u z ravni.



SI. 4.2: Amplitudska karakteristika analognog sistema



SI. 4.3: Impulsni odziv analognog sistema

(a) Transformacija izvoda:

Kontinualne mreže su jednoznačno opisane diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima koji zavise od parametara same mreže oblika

$$\sum_{k=0}^N b_{N-k} \frac{d^{N-k} y(t)}{dt^{(N-k)}} = \sum_{k=0}^M a_{M-k} \frac{d^{(M-k)} x(t)}{dt^{(M-k)}} \quad (4.11)$$

gde su b_i i a_j konstantni koeficijenti. Diskretizacija analogne mreže zasniva se na transformaciji diferencijalne jednačine diskretizacijom izvoda unazad na sledeći način

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &\leftrightarrow \frac{1}{T} [y[n] - y[n-1]] \\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &\leftrightarrow \frac{1}{T} \left[\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dy(t-1)}{dt} \right] = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{T} (y[n] - y[n-1]) - \frac{1}{T} (y[n-1] - y[n-2]) \right] \\
&= \frac{1}{T^2} [y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]] \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Zamenom ovih izvoda u diferencijalnu jednačinu (4.11) dobija se rekurzivna diferencna jednačina koja opisuje diskretnu mrežu sa beskonačnim impulsnim odzivom

$$\sum_{k=0}^N b_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] \tag{4.13}$$

Uzevši u obzir osobine Laplasove i z transformacije prvog jednačini iz izraza (4.12) odgovara veza

$$s = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \tag{4.14}$$

odnosno (pogledati osobine Laplasove transformacije: izvod iz vremenskog domena se pretvara u množenje sa s u frekvencijskom domenu)

$$z = \frac{1}{1 - sT} \tag{4.15}$$

Na osnovu izraza (4.14) i (4.15) se može uočiti da se imaginarna osa iz s ravni preslikava u z ravan na krug poluprečnika 0.5 sa centrom u (0.5,0). Kao što vidimo preslikavanje izvoda ne ispunjava prvi od dva uslova koje analogno-diskretne transformacije treba da zadovolje.

Prenosna funkcija diskretne mreže biće dobijena uvođenjem smene date izrazom (4.14)

$$\begin{aligned}
\frac{U_2(z)}{U_1(z)} &= \frac{1}{1 + 6\frac{1}{T}(1 - z^{-1}) + 4\frac{1}{T^2}(1 - z^{-1})^2} = \frac{1}{4\frac{1}{T^2}(1 - z^{-1})^2 + 6\frac{1}{T}(1 - z^{-1}) + 1} \\
&= \frac{T^2}{4(1 - z^{-1})^2 + 6T(1 - z^{-1}) + T^2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
U_1(z) T^2 &= 4(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) U_2(z) + 6T(1 - z^{-1}) U_2(z) + T^2 U_2(z) \\
&= 4U_2(z) - 8U_2(z) z^{-1} + 4U_2(z) z^{-2} + 6TU_2(z) - 6TU_2(z) z^{-1} + T^2 U_2(z) \\
U_2(z) (4 + 6T + T^2) &= U_1(z) T^2 + U_2(z) z^{-1} (8 + 6T) - 4U_2(z) z^{-2}
\end{aligned}$$

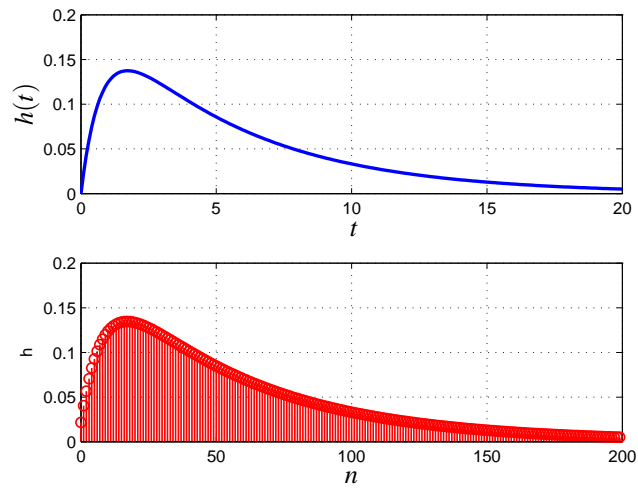
smenom $T = 0.1$ se dobija

$$\frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{z^2}{400 - 860z + 461z^2} = \frac{1/461}{1 - \frac{860}{461}z^{-1} + \frac{400}{461}z^{-2}} \tag{4.17}$$

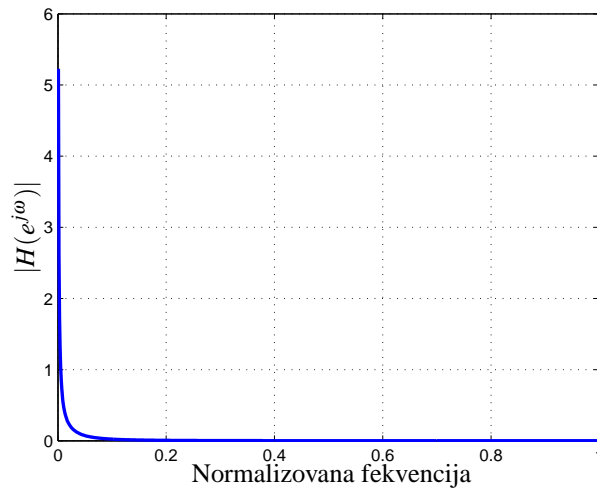
Na slici 4.4 je prikazan impulsni odziv diskretnog sistema dobijen preslikavanjem izvoda.

Amplitudska karakteristika diskretnog sistema je prikazana na slici 4.5.

Uobičajeno je da se prenosna funkcija diskretne mreže daje kao odnos polinoma po promenljivoj z^{-1} , s obzirom da član z^{-k} ima fizičku interpretaciju tj. ukazuje na kašnjenje diskretnog signala za k odbiraka (za k taktnih intervala). Sve naredbe u MATLAB[®]-u koje se odnose na obradu diskretnih (digitalnih) signala očekuju da kod navođenja koeficijenata prenosne funkcije sistema konstanta polinoma iz imenioca ima vrednost jedan, kao u izrazu (4.17).



Sl. 4.4: Impulsni odziv analognog sistema a) i diskretnog sistema b).



Sl. 4.5: Amplitudska karakteristika diskretnog sistema.

(b) Impulsno-invarijantna transformacija:

Impulsno-invarijantna transformacija kontinualne mreže u odgovarajuću diskretnu mrežu se zasniva na diskretizaciji impulsnog odziva kontinualne mreže. U diskretnim trenucima vremena (celobrojni umnožci perioda odabiranja kT_s) impulсни odziv diskretne mreže ima vrednost koja je identična impulsnom odzivu kontinualne mreže u tim trenucima. Impulsni odziv $h_c(t)$ kontinualne mreže je inverzna Laplasova transformacija prenosne funkcije te mreže $H_c(s)$, odnosno $h_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\}$.

Inverzna Laplasova transformacija prenosne funkcije kontinualne mreže se odeduje razvojem u parcijalne razlomke (pretpostavimo da je zadovoljen uslova da je polinom u brojiocu nižeg reda od polinoma u imeniocu), tako da prenosna funkcija može biti data u obliku

$$H_c(s) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{s - p_i} \quad (4.18)$$

gde N predstavlja red polinoma u imeniocu, p_i su polovi prenosne funkcije a r_i odgovarajući ostaci u tim polovima. Izraz (4.18) je dat pod uslovom da su svi polovi prosti. Nakon razvoja u parcijalne razlomke na osnovu tabele koja sadrži Laplasove transformacione parove elementarnih funkcija, lako se dolazi do impulsnog odziva kontinualne mreže

$$h_c(t) = \sum_{i=1}^N r_i e^{p_i t} u_0(t) \quad (4.19)$$

gde je sa $u_0(t)$ označena Hevisajdova funkcija, kojom je obezbeđeno da je impulsni odziv mreže jednak nuli za $t < 0$. Odmeravanjem impulsnog odziva sa periodom odmeravanja T_s dobija se niz odbiraka

$$\{h_c(nT_s)\} = T_s h_c(t)|_{t=nT_s} \quad (4.20)$$

a \mathcal{Z} transformacijom ovog niza dolazi se do prenosne funkcije $H(z)$ diskretnog sistema

$$H(z) = \sum_{i=1}^N T_s r_i \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_i T_s} z^{-1})^n = \sum_{i=1}^N \frac{T_s r_i}{1 - z^{-1} e^{p_i T_s}} \quad (4.21)$$

odkale su uočava da svakom prostom polu odgovara smena

$$\frac{r_i}{s - p_i} \rightarrow \frac{T_s r_i}{1 - z^{-1} e^{p_i T_s}} \quad (4.22)$$

U slučaju da su polovi višestruki, reda m , potrebno je transformisati ih u sledeći oblik

$$\frac{r_i}{(s - p_i)^m} \rightarrow \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} \left(\frac{r_i}{s-a} \right) \Big|_{a=p_i} \quad (4.23)$$

što uz korišćenje transformacije (4.22) daje

$$\frac{r_i}{(s - p_i)^m} \rightarrow \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} \left(\frac{T_s r_i}{1 - e^{a T_s} z^{-1}} \right) \Big|_{a=p_i} \quad (4.24)$$

Dakle u slučaju dvostrukog pola koristimo smenu

$$\frac{r_i}{(s - p_i)^2} \rightarrow \frac{d}{da} \left(\frac{T_s r_i}{1 - e^{a T_s} z^{-1}} \right) \Big|_{a=p_i} \quad (4.25)$$

Analizom impulsno invarijantne transformacije se uočava da se odsečak $j\omega$ ose na intervalu $[-\pi/T, \pi/T]$ preslikava na jedinični krug a horizontalna traka iz leve poluravni s ravni visine $2\pi/T$ u unutrašnjost jediničnog kruga. (Ovo važi i za traku na opsegu $[\pi/T, 3\pi/T]$ itd. Veza između analogne frekvencije ω i digitalne frekvencije $\theta = \omega T_s$ je linearna, odnosno $\theta = 2\pi f/F_s$. Dakle ako je impulsni odziv kontinualnog sistema frekvencijski ograničen, amplitudska i fazna karakteristika kontinualnog sistema su u potpunosti očuvane preslikavanjem na osnovu impulsno invarijantne transformacije. Zaključujemo da impulsno invarijantna transformacija zadovoljava oba navedena uslova.

U z ravni frekvencijska osa se nalazi na jediničnom krugu (nije više beskonačne dužine) a frekvencijski odziv diskretne mreže dobijen impulsno invarijantnom transformacijom je zbir periodično ponovljenih frekvencijskih spektara kontinualne mreže. Zato, ako je frekvencijski odziv kontinualne mreže ograničen a frekvencija odmeravanja bar dva puta viša od najviše nenulte komponente u spektru, tada se frekvencijski odziv diskretne mreže razlikuje samo za multiplikativnu konstantu od frekvencijskog odziva kontinualne mreže (očuvan oblik).

ova metoda vodi računa samo o polovima prenosne funkcije a ne i o nulama i njihovo preslikavanje nije obostrano jednoznačno. Svaka tačka iz s ravni se jednoznačno preslikava u z ravan ali obrnuto ne važi. Jedna tačka iz z ravni se preslikava u skup tačka koje leže na pravoj koja je paralelna sa imaginarnom osom u s ravni.

Ovu transformaciju koristimo za projektovanje diskretnih sistema kod kojih nam je bitan impulsni odziv (koji je očuvan pri diskretizaciji) a nije bitna selektivnost frekvencijske karakteristike (jer se ona može puno razlikovati od karakteristike analognog polaznog sistema). Ovako možemo projektovati filtre propusnike niskih frekvencija i propusnike opsega frekvencija jer su njima opsezi konačne širine i može se odabrati adekvatna frekvencija odabiranja. Filtri propusnici visokih frekvencija i nepropusnici opsega frekvencija ne mogu biti projektovani ovom metodom jer dolazi do preklapanja spektra (napomenuli smo da se periodično ponavlja kod diskretnih sistema).

U prvom koraku se određuju polovi prenosne funkcije analognog sistema i proverava da li su prosti ili višestruki kako bi adekvatno bili preslikani u z ravan.

$$\begin{aligned}
 4s^2 + 6s + 1 &= 0 \\
 s_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 16}}{8} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4} \\
 \frac{1}{4s^2 + 6s + 1} &= \frac{1}{4 \left(s + \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right) \left(s + \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right)} = \frac{A}{s + \frac{3+\sqrt{5}}{4}} + \frac{B}{s + \frac{3-\sqrt{5}}{4}} \\
 A &= \lim_{s \rightarrow -\frac{3+\sqrt{5}}{4}} \frac{1}{4 \left(s + \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right)} = \frac{1/4}{-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} = -0.22 \\
 B &= \lim_{s \rightarrow -\frac{3-\sqrt{5}}{4}} \frac{1}{4 \left(s + \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right)} = \frac{1/4}{-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = 0.22
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Na osnovu izraza (4.22) se dobija

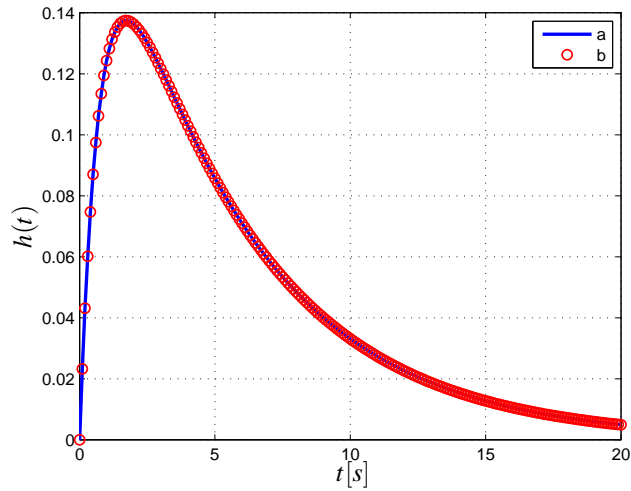
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4s^2 + 6s + 1} &= \frac{\frac{-1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3+\sqrt{5}}{4}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3-\sqrt{5}}{4}} \\
 \frac{\frac{-1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3+\sqrt{5}}{4}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3-\sqrt{5}}{4}} &\rightarrow \frac{T \left(\frac{-1}{2\sqrt{5}} \right)}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}T}} + \frac{T \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \right)}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{4}T}} \\
 H(z) &= \frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{1}{10} \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{-1}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}T}} + \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{4}T}} \right]
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Smenom $T = 0.1$ i u članu u zagradi se dobija

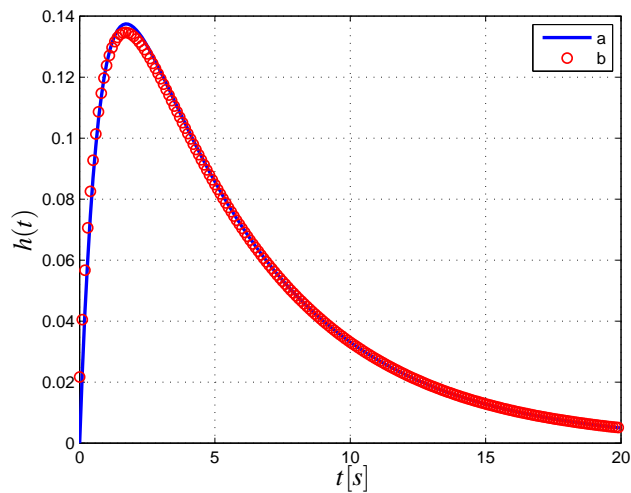
$$\begin{aligned}
 H(z) &= 0.022 \left[\frac{-1}{1 - 0.877z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.981z^{-1}} \right] \\
 &= 0.022 \frac{(-1 + 0.981z^{-1}) + (1 - 0.877z^{-1})}{(1 - 0.877z^{-1})(1 - 0.981z^{-1})} \\
 &= 0.022 \frac{0.104z^{-1}}{1 - 1.86z^{-1} + 0.86z^{-2}} \\
 &= \frac{0.0023z^{-1}}{1 - 1.86z^{-1} + 0.86z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Impulsni odziv diskretnog sistema je prikazan na slici 4.6. Na istoj slici je dat i impulsni odziv analognog sistema kako bi se lakše uočilo da odbirci impulsnog odziva diskretnog sistema imaju upravo istu vrednost kao i polazni analogni sistem u odgovarajućem trenutku kT_s , gde je k ceo broj. Na slici je na x osi dato vreme u sekundama. Kako je period odabiranja $T_s = 0.1s$ u prvih 20 sekundi postoji 200 odbiraka i svi su oni na slici prikazani samo na praktično n osi nisu navedeni redni brojevi odbiraka.

Da bi bilo jasnije na slici 4.7 je još jednom prikazan impulsni odziv sistema dobijen preslikavanjem izvoda gde se vidi da ne postoji preklapanje odziva kao na slici 4.6.



Sl. 4.6: Impulzni odziv analognog a) i diskretnog sistema b) dobijenog impulsno invarijantnom transformacijom.



Sl. 4.7: Impulzni odziv analognog a) i diskretnog sistema b) dobijenog preslikavanjem izvoda.

(c) Bilinearna transformacija

Primenom bilinearne transformacije preslikavaju se prenosne funkcije iz kontinualnog domena u diskretni bez preklapanja spektra, što je osnovna mana impulsno invarijantne transformacije. s ravan se preslikava u z ravan uvođenjem smene

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (4.29)$$

gde je $2/T_s$ konstanta i može imati i neku drugu vrednost.

Inverzna bilinearna transformacija je data sa

$$z = \frac{1 + \frac{T_s}{2}s}{1 - \frac{T_s}{2}s} \quad (4.30)$$

odakle se lako određuje gde se tačke iz s ravni preslikavaju u z ravan. Za razliku od impulsno invarijantne transformacije gde se parče $j\omega$ ose dužine $2\pi/T_s$ preslikavalo na ceo jedinični krug, kod bilinearne transformacije tek cela $j\omega$ osa se smesti na jedinični krug. Dakle i sada je nulta frekvencija na mestu $z = 1$ ali u tački $z = -1$ nije prisutna frekvencija π/T_s već ∞ .

Sada veza između analogne frekvencije ω i digitalne frekvencije θ (gde je $z = e^{j\theta}$) nije linearna, što je mana ove transformacije. To znači da ako se krene od prenosne funkcije analognog sistema koja ima linearnu fazu, dobiće se diskretni sistem čija je faza nelinearna i samim tim zahtevaće fazni korektor. Na osnovu izraza (4.30) se lako dolazi do veze

$$\omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\theta}{2} \quad (4.31)$$

odnosno

$$\theta = 2 \arctan \frac{\omega T_s}{2} \quad (4.32)$$

Bilinearna transformacija ispunjava oba uslova transformacije kontinualnog prostora u diskretni. Mana je izražena nelinearnost jer se cela imaginarna osa iz s ravni preslika na segment $-\pi < \theta < \pi$. Dakle krenuvši od prenosne funkcije analognog sistema

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + 6s + 4s^2} \quad (4.33)$$

korišćenjem smene (4.29) se dobija prenosna funkcija diskretnog sistema

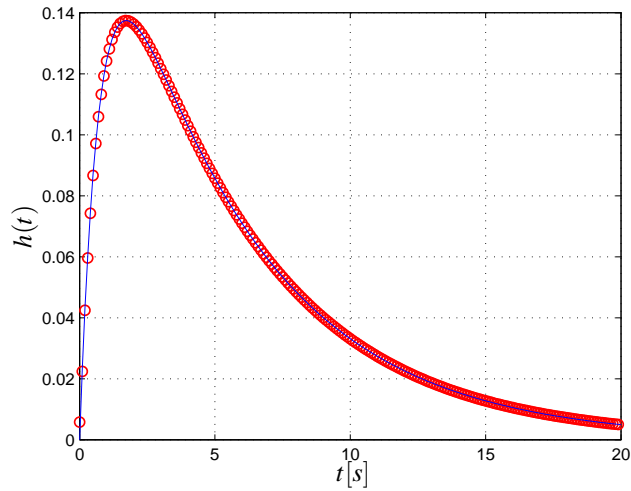
$$\begin{aligned} \frac{U_2(z)}{U_1(z)} &= \frac{1}{4 \frac{4}{T^2} \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + 6 \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})} + 1} / * \left((1+z^{-1})^2 T^2 \right) \\ &= \frac{T^2 (1+z^{-1})^2}{16(1-2z^{-1}+z^{-2}) + 12T(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + T^2(1+z^{-1})^2} \\ &= \frac{T^2(z^{-2} + 2z^{-1} + 1)}{16 - 32z^{-1} + 16z^{-2} + 12T - 12Tz^{-2} + T^2 + 2T^2z^{-1} + T^2z^{-2}} \\ &= \frac{T^2(z^{-2} + 2z^{-1} + 1)}{z^{-2}(16 - 12T + T^2) + z^{-1}(2T^2 - 32) + 16 + T^2 + 12T} / * 100 \\ &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{100(17.21 - 31.98z^{-1} + 14.81z^{-2})} = \frac{0.00058 + 0.00116z^{-1} + 0.00058z^{-2}}{1 - 1.858z^{-1} + 0.86z^{-2}} \end{aligned}$$

Impulsni odziv diskretnog sistema je prikazan na slici 4.8.

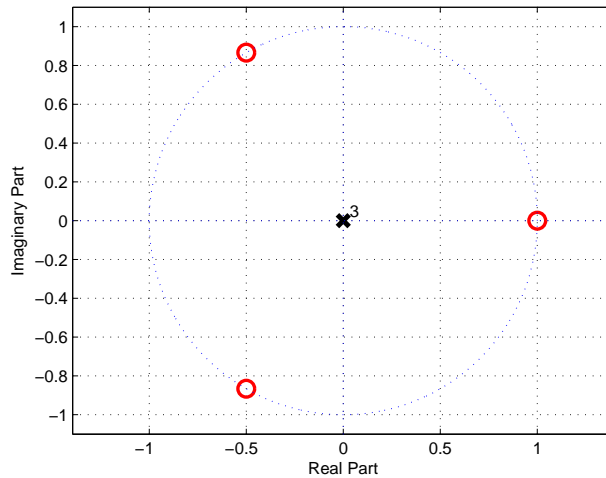
2. Dat je impulsni odziv nerekurzivnog (FIR) digitalnog filtra $\{h[n]\} = \{1, 2, -2, -1\}$. Odrediti prenosnu funkciju filtra i odrediti:
- Amplitudsku i faznu karakteristiku filtra;
 - Grupno kašnjenje filtra;
 - Odrediti prenosnu funkciju filtra za koji je položaj polova i nula u z ravni dat na slici 4.9.

Rešenje:

Impulsni odziv je prikazan na slici 4.10. Nerekurzivni filtri ne mogu biti projektovani ni jednom od metoda preslikavanja date prenosne funkcije analognog sistema jer se na taj način uvek dobija IIR sistem (filar). FIR filtri se projektuju direktno u z domenu. Karakteriše ih mogućnost realizacije idealne linearne fazne karakteristike. Da bi se to obezbedilo potrebno je da impulsni odziv bude simetričan ili antisimetričan, kao u datom primeru. Ako je data amplitudska karakteristika koju treba zadovoljiti a



Sl. 4.8: Impulsni odziv diskretnog sistema a) dobijenog bilinearnom transformacijom i analognog b) .



Sl. 4.9: Nule i polovi diskretnog sistema) .

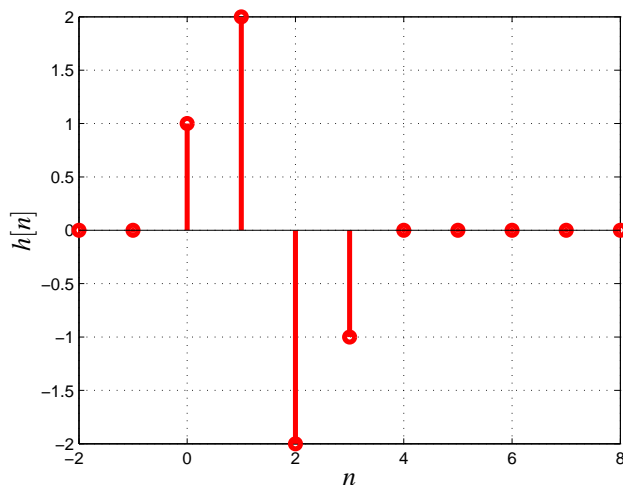
faza nije od značaja uvek se projektuje IIR filter jer će red filtra biti značajno niži od odgovarajućeg FIR filtra sa istom (sličnom) amplitudskom karakteristikom. Međutim u nekim praktičnim aplikacijama nisu dozvoljena fazna izobličenja i FIR filtri u takvim slučajevima nalaze svoju primenu.

Kako član z^{-k} ukazuje na kašnjenje za k odbiraka (u vremenskom domenu kašnjenje iznosi kT_s), \mathcal{Z} transformacijom se lako dolazi do prenosne funkcije FIR filtra, krenuvši od njegovog impulsnog odziva $h[n]$ s obzirom da je $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 2z^{-2} - z^{-3} \quad (4.34)$$

Kako je frekvencijska osa u z ravni smeštena na jediničnom krugu čije su sve tačke date sa

$$z = e^{j\theta}$$



Sl. 4.10: Impulsni odziv FIR filtra).

, ge je θ ugao između realne ose i potega iz koordinatnog početka do posmatrane tačke, frekvencijske karakteristike filtra se određuju kao

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\theta}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\theta}} = 1 + 2e^{-j\theta} - 2e^{-j2\theta} - e^{-j3\theta} \\
 &= 1 - e^{-j3\theta} + 2(e^{-j\theta} - e^{-j2\theta}) \\
 &= e^{-j3\frac{\theta}{2}} (e^{j3\frac{\theta}{2}} - e^{-j3\frac{\theta}{2}}) + 2e^{-j3\frac{\theta}{2}} (e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}}) \\
 &= e^{-j3\frac{\theta}{2}} 2j \sin(3\frac{\theta}{2}) + 2e^{-j3\frac{\theta}{2}} 2j \sin(\frac{\theta}{2}) \\
 &= e^{-j3\frac{\theta}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} 2 \left(\sin(3\frac{\theta}{2}) + 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \right) \\
 &= 2 \left(\sin(3\frac{\theta}{2}) + 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \right) e^{j\frac{\pi-3\theta}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Svaka kompleksna vrednost može biti data preko modula i faznog ugla tj.

$$H(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})| e^{j\varphi(\theta)} \tag{4.36}$$

(a) Dakle, amplitudska karakteristika filtra je data izrazom

$$|H(e^{j\theta})| = 2 \left(\sin(3\frac{\theta}{2}) + 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \right) \tag{4.37}$$

dok fazna karakteristika ima vrednost

$$\varphi(\theta) = \arg \{ H(e^{j\theta}) \} = \frac{\pi - 3\theta}{2} \tag{4.38}$$

(b) Grupno kašnjenje filtra je definisano kao negativni izvod po frekvenciji fazne karakteristike, odnosno

$$\tau(\theta) = -\frac{d}{d\theta} \varphi(\theta) = \frac{3}{2} \tag{4.39}$$

Sa slike 4.9 uočavamo da je pol trostruki u koordinatnom početku i da filter poseduje tri nule z_i locirane na jediničnom krugu. Realna nula je pod uglom 0 a konjugovano kompleksni par nula je opod uglom $\pm 2\pi/3$

(c)

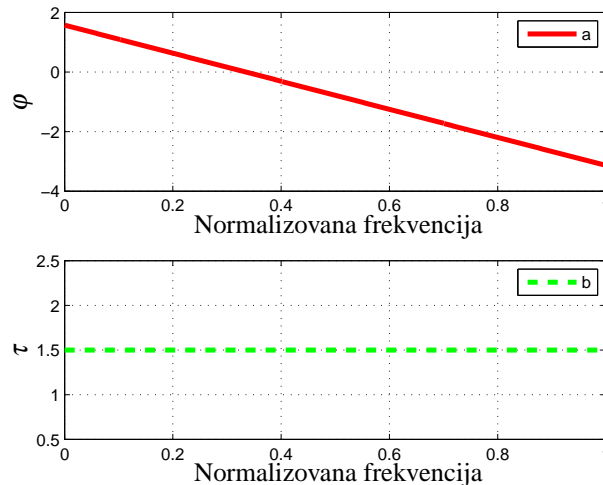
$$\begin{aligned}
 z_1 &= 1e^{j0} = 1 \\
 z_2 &= e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 z_3 &= e^{mj\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Krenuvši od polova i nula za prenosnu funkciju se dobija

$$\begin{aligned}
 H(z) &= k \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}{(z-0)^3} = k \frac{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z^3} \\
 &= k \frac{(z-1)\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}{z^3} = k \frac{(z-1)\left(z^2+z+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}{z^3} \\
 &= k \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{z^3} = k \frac{z^3+z^2+z-z^2-z-1}{z^3} \\
 &= k \frac{z^3-1}{z^3} = k(1-z^{-3})
 \end{aligned}$$

gde k predstavlja konstantu za čije određivanje je potreban (da bi rešenje bilo jednoznačno) još jedan podatak (na primer pojačanje filtra na nekoj frekvenciji). U z^{-1} ravni FIR filter ne poseduje polove, tj. u z ravni oni su uvek smešteni u koordinatnom početku zbog čega su FIR filteri uvek stabilni.

Faza i grupno kašnjenje FIR filtra su prikazani na slici 4.11.



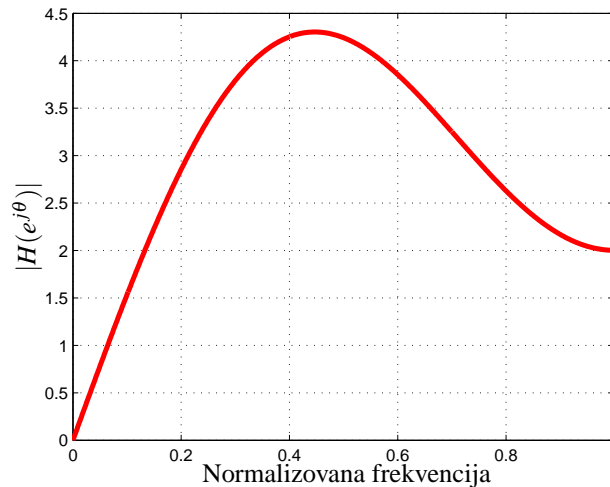
Sl. 4.11: Faza a) i grupno kašnjenje b) FIR filtra trećeg reda.

Da prokomentarišemo amplitudsku karakteristiku

$$\left| H(e^{j\theta}) \right| = 2 \left(\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \tag{4.41}$$

Da bi se dobila suma sinusa u zagradi datog izraza neophodno je da se članovi impulsnog odziva javljaju u parovima sa suprotnim znakom. U ovom slučaju impulsni odziv je bio parne dužine i javila su se dva para koja su pretvorena u dva sinusa. Ovakvo udruživanje nije moguće ako je

impulsni odziv neparne dužine jer centralni (središnji) član ne bi posedovao parnjaka. Međtim ovaj problem neće se javiti ako je impulsni odziv neparne dužine sa centralnim članom jednakim nuli. Amplitudska karakteristika data sa (4.41) prikazana je na slici 4.12.



Sl. 4.12: Amplitudska karakteristika FIR filtra

Kako u zagradi figurišu samo sinusni članovi uvek će pojačanje filtra na nultoj frekvenciji biti jednako nuli, kao na slici 4.12 kada je impulsni odziv antisimetričan. S obzirom da pojačanje mora biti jednako nuli za DC komponentu, sa ovakvim impulsnim odzivom nikako nije moguće realizovati filter propusnik niskih frekvencija kao i filter nepropusnik opsega frekvencija kod kojih je neophodno jedinično pojačanje u koordinatnom početku.

3. Frekvencija odmeravanja iznosi $F_s = 1\text{kHz}$, maksimalno slabljenje filtra u propusnom opsegu je $a_{max} = 1\text{dB}$ i minimalno slabljenje filtra u nepropusnom opsegu $a_{min} = 40\text{dB}$. Napisati programe u MATLAB[®]-u za izračunavanje koeficijenata prenosne funkcije Butterworth-ovog:
- Niskopropusnog filtra (NF), graničnih frekvencija $f_p=150\text{Hz}$ i $f_s=200\text{Hz}$;
 - Visokopropusnog filtra (VF), graničnih frekvencija $f_s=350\text{Hz}$ i $f_p=400\text{Hz}$;
 - Filtra propusnika opsega (PO), graničnih frekvencija $f_s = [100\text{Hz}, 400\text{Hz}]$ i $f_p = [200\text{Hz}, 300\text{Hz}]$.

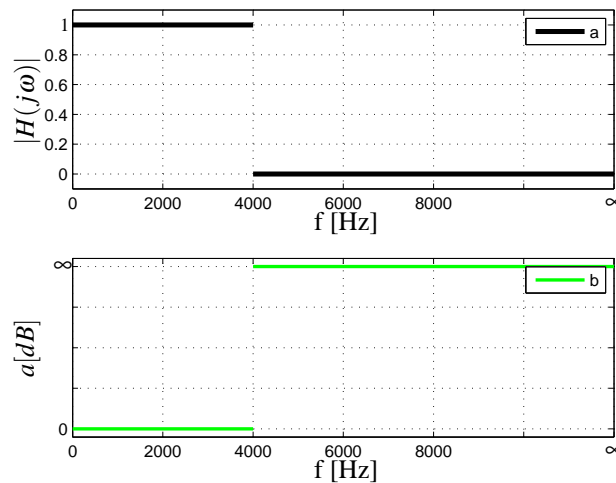
Rešenje:

U digitalnim sistemima signali koji se obrađuju, za razliku od analognih signala, imaju ograničen spektar jer je prvi korak u postupku A/D konverzije ograničavanje spektra kako bi se adekvatno odabrala frekvencija odabiranja (koja mora biti bar dva puta viša od maksimalne frekvencije u spektru signala). Šta su filtri? Filtri mogu biti analogni i digitalni. Filtrima se spektar signala modifikuje. Na primer, govorni i muzički signal imaju komponente spektra do 20000 Hz. U digitalnoj telefoniji se koristi radna frekvencija od 8 kHz ($F_s = 8\text{kHz}$ i određena je eksperimentalno sa ciljem da bude što niža kako bi se smanjio protok podataka a da se istovremeno zadovolji kriterijum razumljivosti prenetog govornog signala). To znači da telefonski signal u idealnom slučaju treba da ima ograničen spektar na 4000 Hz. Ograničavanje spektra će biti izvedeno upotrebom analognog filtra propusnika niskih frekvencija. Ovakvo ime je dobio zbog činjenice da propušta spektralne komponente na niskim frekvencijama (od nulte frekvencije do 4000 Hz) a ne propušta ni jednu komponentu iznad 4000 Hz. Da podsetimo, spektar analognog signala se prostire od nulte frekvencije do beskonačnosti. Dakle, analogni filter propusnik niskih frekvencija je sistem koji ima pojačanje ($|H(j\omega)|$) jednako

jedinici za frekvencije iz opsega $[0, 4000\text{Hz}]$ i pojačanje jednako nuli na opsegu $[4000\text{Hz}, \infty]$. Ova karakteristika može biti alternativno data korišćenjem slabljenja koje se definiše kao

$$a = -20\log_{10}(|H(j\omega)|)$$

i daje se u decibelima. S obzirom na osobine logaritamske funkcije, u propusnom opsegu filter ima pojačanje 1, što je ekvivalentno sa 0 dB a u nepropusnom opsegu je pojačanje 0 što je ekvivalentno sa ∞ dB. Ovo su osobine idealnog filtra. Realni filtri samo aproksimiraju ovu idealnu karakteristiku. Zato se pri projektovanju filtera zadaje maksimalno dozvoljeno slabljenje (odstupanje od idealnih 0 dB) u propusnom opsegu i minimalno potrebno slabljenje (idealno je ∞) u nepropusnom opsegu. Što su zahtevi bliži idealnim potrebni red filtera za njihovo zadovoljenje biće viši (viši red polinoma prenosne funkcije) kao i troškovi njegove hardverske realizacije. Zato je ideja odrediti prenosnu funkciju što nižeg reda a da budu zadovoljene zadate specifikacije. U literaturi su detaljno opisane metode projektovanja Butterworth-ovih, Chebyshev-ljevih, inverznih Chebyshev-ljevih i eliptičkih (Cauer-ovih) filtera. Butterworth-ovi filtri imaju maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku. Pojačanje je na nultoj frekvenciji jednako jedinici i monotono opada ka nuli kako frekvencija raste.

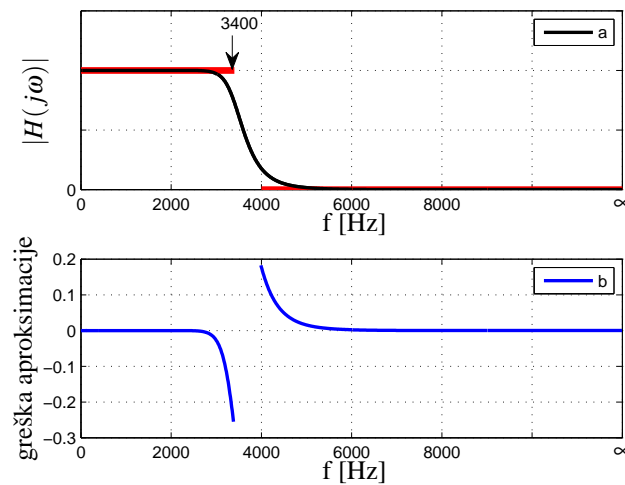


Sl. 4.13: Amplitudska karakteristika a) i slabljenje b) idealnog analognog filtra propusnika niskih frekvencija

Na slici 4.13 su prikazane idealne karakteristike analognog niskopropusnog filtra sa graničnom frekvencijom 4000Hz. Prenosna funkcija filtera je data preko odnosa dva polinoma. Prikazana karakteristika je prekidna sa naglim padom pojačanja od 1 na 0 na graničnoj frekvenciji što je neizvodljivo u realnim uslovima bez obzira na red polinoma. Zato se umesto prikazane idealne karakteristike sa jednom graničnom frekvencijom pri projektovanju filtera koristi njena aproksimacija sa zadatom graničnom frekvencijom propusnog opsega $f_p = 3400\text{Hz}$ i graničnom frekvencijom nepropusnog opsega, npr. $f_s = 4000\text{Hz}$, kao na slici 4.14.

Bez obzira što karakteristika filtera sa slike 4.14 nije idealna, pojačanje sistema (filtera) je dovoljno blisko nuli da možemo reći da signal na izlazu filtera ne poseduje komponente spektra iznad 4 kHz tako da se može izvršiti digitalizacija ovog signala sa frekvencijom odabiranja 8 kHz. Slika 4.14 odgovara filteru čije je minimalno slabljenje u propusnom opsegu svega 15 dB dok se u praksi koriste filtri sa slabljenjem 60 i više decibela u nepropusnoj zoni tako da je pojačanje iznad 4 kHz mnogo bliže nuli nego na prikazanoj slici.

Pretpostavimo da pomenuti govorni signal odabran frekvencijom $F_s = 8\text{kHz}$ (maksimalna komponenta u spektru signala je 4 kHz) želimo da filtriramo digitalnim filtrom tako da pre-



Sl. 4.14: Amplitudska karakteristika a) i odstupanje od idealne karakteristike

ostanu samo komponente spektra ispod 2 kHz. Na slici 4.15 je prikazana karakteristika idealnog digitalnog filtra propusnika niskih frekvencija sa graničnom frekvencijom $f_g = 2\text{kHz}$. Kao i kod analognog filtra u propusnom opsegu se zahteva jeinično pojačanje a u nepropusnom opsegu nulto pojačanje. Međutim, frekvencijska osa se ne prostire do beskonačnosti već samo do polovine frekvencije odabiranja. Isti grafik mogao je biti dat sa digitalnom frekvencijom na x osi u kom slučaju bi frekvenciji 4 kHz odgovarala digitalna frekvencija π ili njena normalizovana vrednost 1.

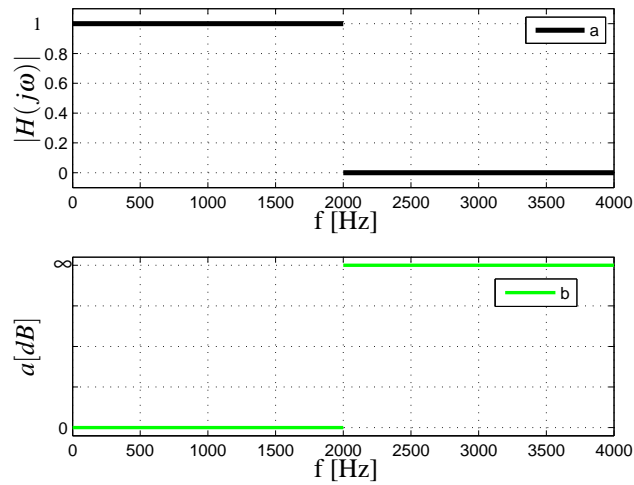
Osim maksimalno ravne karakteristike (kod Butterworth-ovih filtara, gde je prvih n izvoda amplitudske karakteristike jednako nuli za $\omega = 0$. Tangenta na krivu u tački gde funkcija ima maksimum ili minimum (tu je izvod funkcije jednak nuli) je ravna tj. horizontalna prava i otuda naziv maksimalno ravna jer ne samo prvi, već i viši izvodi su jednaki nuli) često se koristi i mini-max aproksimacija idealne karakteristike (gde realna karakteristika ima oscilatornu prirodu sa jednakim minimumima i maksimumima a čija vrednost je jednoznačno određena zadatim dozvoljenim slabljenjem).

Chebyshev-ljevi filtri u propusnom opsegu koriste mini-max aproksimaciju a imaju ravnu (monotono opadajuću kao kod Butterworth-ovih filtara) karakteristiku u nepropusnoj zoni. Inverzni Chebyshev-ljevi filtri imaju monotono opadajuću karakteristiku u propusnom opsegu a mini-max karakteristiku u nepropusnoj zoni, dok eliptički filtri u oba opsega koriste mini-max aproksimaciju.

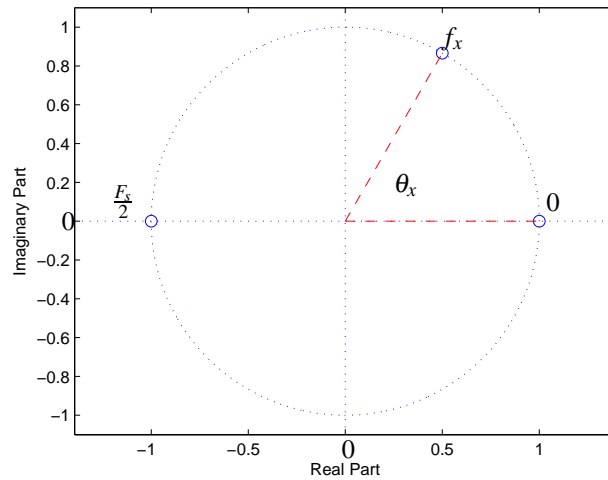
Maksimalna frekvencija koja može da se pojavi u digitalnom sistemu je $F_s/2 = 500\text{ Hz}$ i njoj odgovara digitalna frekvencija $\theta = \pi$. U literaturi se često na frekvencijskoj osi ne nalazi vrednost θ već njena normalizovana vrednost θ/π zbog čega su granične vrednosti na x osi 0 i 1. Na slici 4.16 su prikazane lokacije nulte frekvencije, polovine frekvencije odabiranja $F_s/2$ i proizvoljne frekvencije f_x (Frekvencijska osa se nalazi na jediničnom krugu. Gornja polovina kružnice odgovara pozitivnim a donja polovina negativnim frekvencijama respektivno). Frekvenciji 0 Hz odgovara digitalna frekvencija $\theta = 0$, frekvenciji $F_s/2$ odgovara digitalna frekvencija π dok frekvenciji f_x odgovara digitalna frekvencija θ_x . Vrednost θ_x se lako određuje na osnovu proporcije

$$\frac{F_s}{2} : \pi = f_x : \theta_x$$

odakle dobijamo da je



Sl. 4.15: Amplitudska karakteristika a) i slabljenje b) idealnog digitalnog filtra propusnika niskih frekvencija za $F_s = 8kHz$



Sl. 4.16:

$$\pi f_x = \theta_x \frac{F_s}{2} \implies \theta_x = \frac{f_x}{F_s} \pi \quad (4.42)$$

U MATLAB[®] -u frekvencije se kao ulazni argumenti unose u normalizovanim vrednostima (dobijaju se deljenjem sa π , tako da frekvenciji $\frac{F_s}{2}$ odgovara normalizovana frekvencija 1 a frekvenciji f_x odgovara normalizovana frekvencija

$$\theta_x = \frac{f_x}{F_s} \pi \quad (4.43)$$

(a) Niskopropusni filter - NF:

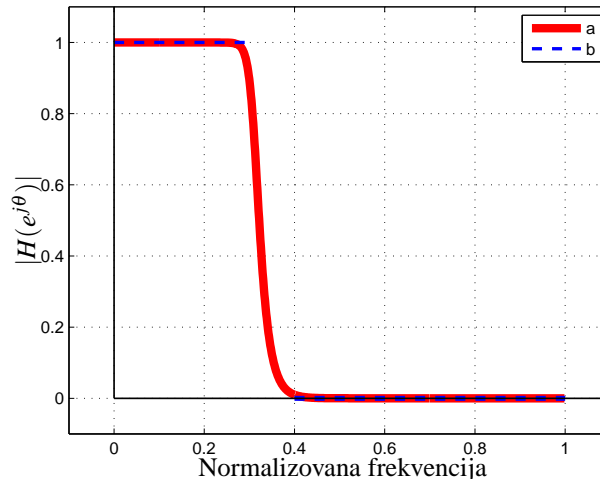
```

clear all %brise memoriju
close all %zatvara sve otvorene slike
Fs=1000;% frekvencija odabiranja
fp=150; %granica propusnog opsega
fs=200; % granica nepropusnog opsega
fs2=Fs/2; %polovina frekv. odabiranja
rp=1; %slabljenje u decibelima u propusnom opsegu
rs=40; % dB u nepropusnom opsegu
[n,wn]=buttord(fp/fs2,fs/fs2,rp,rs) %normalizovane frekvencije su
%argumenti naredbe buttord koja odredjuje potrebni red filtra n i
%parametar wn koji su ulaz za naredbu butter koja kao izlaz daje
%koeficijente prenosne funkcije (koef. polinoma)
[b,a]=butter(n,wn) % b i a su polinomi prenosne funkcije
[h,w]=freqz(b,a,1000); % u 1000 tacaka (izmedju 0 i pi) racuna
%karakteristiku filtra h, a u vektor w smesta frekvencijske tacke
figure %otvara sliku
plot(w/pi,abs(h)) % crta amplitudsku karakteristiku koja je moduo
%vektora h pri cemu je na x osi normalizovana frekvencija

```

Argumenti MATLAB[®] naredbi su normalizovane frekvencije a određene su na osnovu izraza (4.43).

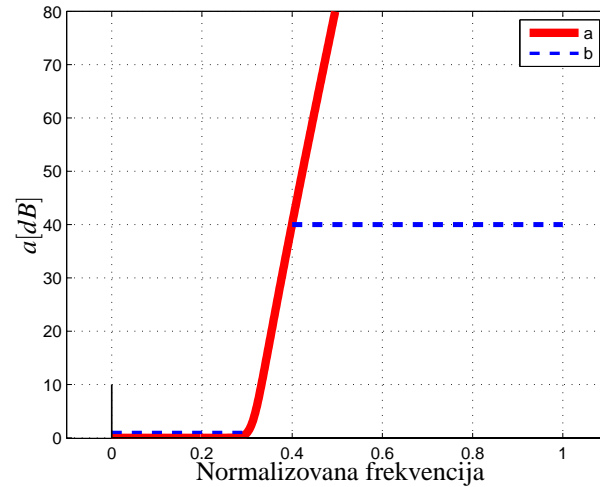
Na slici 4.17 je prikazana karakteristika filtra propusnika niskih frekvencija



Sl. 4.17: Amplitudska karakteristika Buterworth-ovog filtra a) i karakteristika idealnog filtra b).

Idealni filter ne može biti realizovan. Što su zahtevi strožiji red filtra će biti viši. Zadato dozvoljeno slabljenje od 1dB je realizovano na opsegu $[0, 0.3] = [0, 150/500]$ (kad je reč o normalizovanim frekvencijama) a minimalno slabljenje od 40 dB je realizovano na opsegu $[0.4, 1] = [200/500, 1]$. Opseg $[0.3, 0.4]$ je poznat kao prelazna zona i tu se karakteristika filtra ne kontrolise i nije bitno kako dobijena karakteristika u tom delu izgleda. Važno je da u propusnoj zoni pojačanje bude dovoljno blisko jedinici (pojačanje nema jedinicu, tj reč je o neimenovanom broju) a u nepropusnoj zoni dovoljno blisko nuli. Na slici 4.17 je prikazano pojačanje sistema, odnosno amplitudska karakteristika. Uobičajeno da se umesto pojačanja zadaje želejno slabljenje u decibelima po opsezima. Praktično slika 4.17 ima oblik 4.18 kada je na y osi dato slabljenje u decibelima. Veza između pojačanja i slabljenja je data izrazom

$$a[dB] = -20\log_{10}(|H(e^{j\theta})|)$$



Sl. 4.18: Slabljenje Buterworth-ovog filtra a) i zadata granična slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu b).

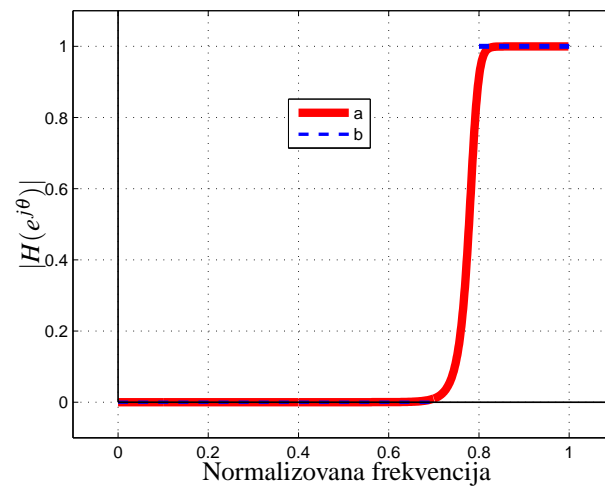
Dakle slika 4.17 i 4.18 prikazuju istu karakteristiku samo je na y osi odabrana druga jedinica. Sa obe slike se uočava da projektovani filter zadovoljava zadate specifikacije. U ovom primeru je izabran Butterworth-ov filter koga karakteriše maksimalno ravna karakteristika, koja je monotona funkcija frekvencije. U konkretnom slučaju je dobijen filter reda $N = 15$. To je minimalna složenost filtera kojom se zadovoljavaju zadate specifikacije. Izborom filtera višeg reda se dobijaju bolje specifikacije na uštrb povećane složenosti filtera (viši red polinoma, više koeficijenata, veći broj komponenti kod hardverske realizacije što neminovno vodi višoj ceni. Nama je cilj da za što nižu cenu (niži red polinoma) projektujemo filter koji zadovoljava postavljene specifikacije).

(b) Visokopropusni filter - VF:

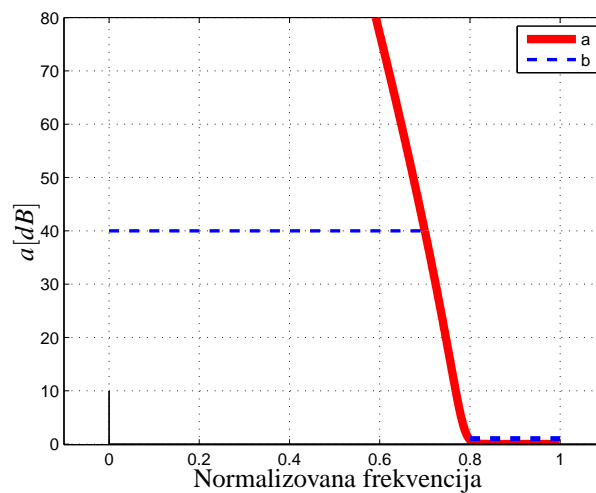
Jedina razlika kod projektovanja propusnika visokih frekvencija u odnosu na propusnik niskih frekvencija se ogleda u naredbi `butter` gde se pojavljuje kao poslednji argument naredbe `'high'`, koji ukazuje da se projektuje visokopropusni filter. Uostalom kod projektovanja filtera uvek se problem svodi na projektovanje propusnika niskih frekvencija (time je vec određen red filtera) a sve ostale karakteristike (propusnik opsega, propusnik visokih frekvencija ...) se lako dobijaju matematičkim manipulacijama tj. preslikavanjima. Odgovarajući MATLAB[®] kod je dat u nastavku

```
clear all
fs=1000;
Fs=350;
fp=400;
fs2=Fs/2;
rp=1;
rs=40;
[n,wn]=buttord(fp/fs2, fs/fs2, rp, rs)
[b,a]=butter(n,wn, 'high')
% slede naredbe crtanja koje su izostavljene
```

a amplitudska karakteristika i karakteristika slabljenja su date na slikama 4.19 i 4.20, respektivno.



Sl. 4.19: Amplitudska karakteristika Buterworth-ovog filtra a) i karakteristika idealnog filtra b).



Sl. 4.20: Slabljenje Buterworth-ovog filtra a) i zadata granična slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu b).

U slučaju filtra propusnika visokih frekvencija granična frekvencija propusnog opsega f_p je viša od granice nepropusnog opsega f_s . Idelani filter bi imao pojačanje jednako nuli (u idealnom slučaju slabljenje od ∞ decibela) na opsegu frekvencija $[0, f_s]$ i jedinično pojačanje (slabljenje od 0 decibela u idealnom slučaju) na opsegu $[f_p, F_s/2]$, izraženo u hertzima tj. na opsezima $[0, \theta_s]$ i $[\theta_p, \pi]$, datim u digitalnoj frekvenciji. Sa prikazanih slika vidimo da projektovani filter zadovoljava zadate specifikacije.

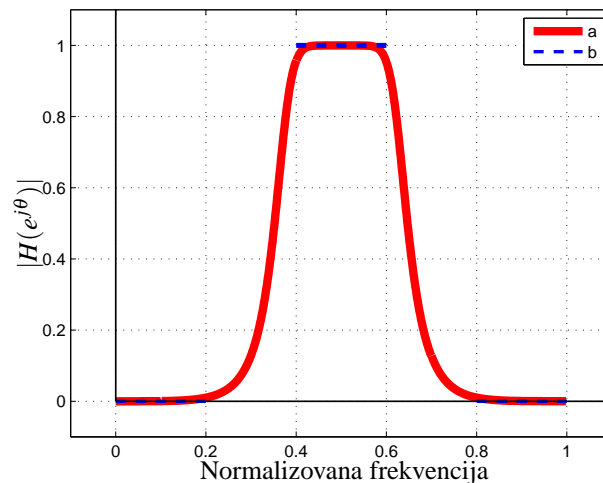
(c) Filter propusnik opsega:

Filter propusnik opsega frekvencija ima dve granične frekvencije za propusni opseg i dve za nepropusni opseg. Zato su sada granične frekvencije sme]v stene u vektore f_1 i f_2 . Projektovanje (nije vidljivo korisniku jer samo poziva gotove funkcije MATLAB[®] -a) se i sada svodi na određivanje najprostijeg filtra propusnika niskih frekvencija (ova oblast se izučava na višim godinama studija) iza čega se preslikavanjem (kada se udvostručava red filtra) dobija traženi filter propusnik opsega

frekvencija. U nastavku sledi kod MATLAB[®] programa kojim se određuje prenosna funkcija filtra, s tim da su izostavljene naredbe za crtanje dobijenih karakteristika.

```
Fs=1000;
f1=[200,300];
f2=[100,400];
fs2=Fs/2;
rp=1;
rs=40;
[n,wn]=buttord(f1/fs2,f2/fs2,rp,rs)
[b,a]=butter(n,wn)
```

Amplitudska karakteristika i odgovarajuća karakteristika slabljenja (potpuno ista karakteristika, predstavljena na dva načina) su prikazane na slikama 4.21 i 4.22.



Sl. 4.21: Amplitudska karakteristika Buterworth-ovog filtra a) i karakteristika idealnog filtra b).

Kao i u prethodna dva slučaja uočavaju se prelazne zone ([0.2, 0.4] i [0.6, 0.8]) unutar kojih se nema kontrola nad karakteristikom filtra. Ova nemogućnost da se realizuje idealni filter u praksi utiče na izbor frekvencije odabiranja F_s . Tako na primer, u slučaju muzičkog signala koji se pre digitalizacije filtrom propusnikom niskih frekvencija ograničava tako da maksimalna frekvencija koja može da se pojavi u njegovom spektru iznosi 20 kHz, odabiranje se ne izvodi frekvencijom $F_s = 40$ kHz, što je idealni slučaj, već se koristi, zbog pojave prelazne zone, nešto viša frekvencija od $F_s = 44100$ Hz.

4. (a) Neka je funkcija prenosa diskretne mreže:

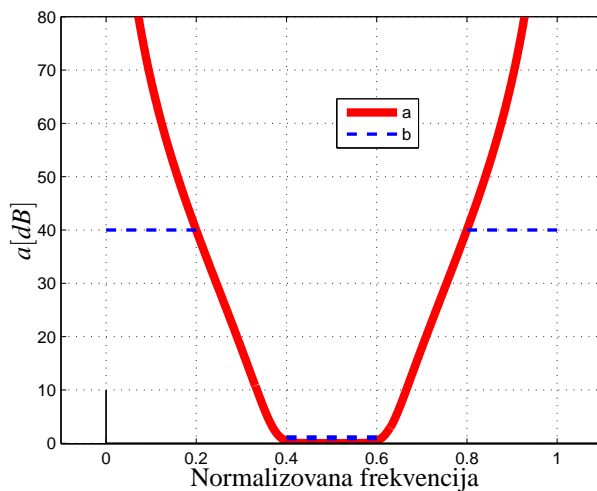
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z^3 + 5z + 6}{z^2 + 3z + 4}$$

Napisati diferencnu jednačinu za datu mrežu.

- (b) Data je diferencna jednačina diskretne mreže:

$$y[n] = -y[n-2] - 7y[n-1] - 2x[n-2] + 3x[n-1]$$

Napisati izraz za prenosnu funkciju date mreže.



Sl. 4.22: Slabljenje Buterworth-ovog filtra a) i zadata granična slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu b).

- (c) Rešiti diferencnu jednačinu primenom \mathcal{Z} -Transformacije ako je na ulazu kola prisutan jedinični impuls (Dirakov impuls $\delta[n]$).

$$y[n] = -5y[n-2] + 6y[n-1] - 12x[n-1] + 10x[n]$$

- (a) U prvom koraku brojilac i imenilac prenosne funkcije se dele sa z^2 (sa z stepenovan najvišim stepenom u datom izrazu kako bi novi izraz bio funkcija po promenljivoj z^{-1} koja predstavlja kašnjenje i olakšava u narednom koraku izračunavanje inverzne \mathcal{Z} transformacije)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + 5z + 6}{z^2 + 3z + 4} = \frac{1 + 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 4z^{-2}} \quad (4.44)$$

Unakrsnim množenjem se dobija izraz

$$Y(z) + 3Y(z)z^{-1} + 4Y(z)z^{-2} = X(z) + 5X(z)z^{-1} + 6X(z)z^{-2} \quad (4.45)$$

Izdvajanjem člana $Y(z)$ dobijamo

$$Y(z) = -3Y(z)z^{-1} - 4Y(z)z^{-2} + X(z) + 5X(z)z^{-1} + 6X(z)z^{-2} \quad (4.46)$$

a posle inverzne \mathcal{Z} transformacije se dobija diferencna jednačina koja pokazuje kako najnoviji izlazni odbirak zavisi od tekućeg ulaznog i prethodnih ulaznih i izlaznih odbiraka

$$y[n] = -3y[n-1] - 4y[n-2] + x[n] + 5x[n-1] + 6x[n-2] \quad (4.47)$$

Korišćena je osobina Z transformacije

$$F(z)z^{-k} \leftrightarrow f[n-k]$$

- (b) Krenuvši od diferencne jednačine

$$y[n] = -y[n-2] - 7y[n-1] - 2x[n-2] + 3x[n-1] \quad (4.48)$$

\mathcal{Z} transformacijom se dobija

$$Y(z) = -Y(z)z^{-2} - 7Y(z)z^{-1} - 2X(z)z^{-2} + 3X(z)z^{-1} \quad (4.49)$$

Izvlačenjem ispred zagrada zajedničkih članova se dobija

$$Y(z) [1 + 7z^{-1} + z^{-2}] = X(z) [3z^{-1} - 2z^{-2}] \quad (4.50)$$

što sređivanjem daje prenosnu funkciju sistema

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^{-1} - 2z^{-2}}{1 + 7z^{-1} + z^{-2}} = \frac{3z - 2}{z^2 + 7z + 1} \quad (4.51)$$

- (c) Krenuvši od diferencne jednačine koja opisuje sistem u vremenskom domenu (analogno diferencijalnim jednačinama u slučaju analognih sistema)

$$y[n] = -5y[n-2] + 6y[n-1] - 12x[n-1] + 10x[n] \quad (4.52)$$

\mathcal{L} transformacijom se dobija

$$Y(z) = -5Y(z)z^{-2} + 6Y(z)z^{-1} - 12X(z)z^{-1} + 10X(z) \quad (4.53)$$

opis sistema u frekvencijskom domenu.

$$Y(z) [1 + 5z^{-2} - 6z^{-1}] = X(z) [10 - 12z^{-1}] \quad (4.54)$$

odnosno prenosna funkcija datog sistema

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{10 - 12z^{-1}}{1 + 5z^{-2} - 6z^{-1}} = \frac{10 - 12z^{-1}}{1 - 6z^{-1} + 5z^{-2}} \quad (4.55)$$

\mathcal{L} transformacija Dirakovog impulsa ima vrednost $\mathcal{L}\{\delta[n]\} = 1$ (a on je u ovom slučaju ulazni signal $x[n]$). Na osnovu izraza (4.55) se dobija da je

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \cdot 1 = H(z)$$

Signal $y[n]$ biće određen inverznom \mathcal{L} transformacijom za šta je neophodno odrediti polove izraza (4.55) (razvojem u parcijalne razlomke)

$$\begin{aligned} 5z^{-2} - 6z^{-1} + 1 &= 0 \\ z_{1,2}^{-1} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} \\ z_1^{-1} &= 1 \quad z_2^{-1} = 1/5 \end{aligned}$$

Dakle reč je o dva prosta realna pola.

$$Y(z) = \frac{10 - 12z^{-1}}{5(z^{-1} - 1)(z^{-1} - \frac{1}{5})} = \frac{10 - 12z^{-1}}{(z^{-1} - 1)(5z^{-1} - 1)} = \frac{A}{z^{-1} - 1} + \frac{B}{5z^{-1} - 1}$$

Pristupamo određivanju ostataka u polovima

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 1} \frac{10 - 12z^{-1}}{5z^{-1} - 1} = \frac{10 - 12}{4} = -\frac{1}{2} \\ B &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 1/5} \frac{10 - 12z^{-1}}{z^{-1} - 1} = \frac{10 - \frac{12}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{50 - 12}{-4} = -\frac{19}{2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dakle \mathcal{L} transformacija signala y ima vrednost

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}}{z^{-1} - 1} + \frac{-\frac{19}{2}}{5z^{-1} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{19}{2}}{1 - 5z^{-1}}$$

koja je napisana u pogodnom obliku da se korišćenjem tablice \mathcal{Z} transformacije lako određuje (praktično inverznom \mathcal{Z} transformacijom) vremenski predstavnik, tj. $y[n]$ kao

$$y[n] = h[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{Y(z)\} = \frac{1}{2}u_0[n] + \frac{19}{2}5^n, \text{ za } n \geq 0 \quad (4.57)$$

Polovi u izrazu (4.56) su određeni u z^{-1} ravni a ne u z ravni tako da je pol $z_2 = 5$ i nalazi se van jediničnog kruga. Sistem sa ovakvim polom nije stabilan (potrebno je da svi polovi budu unutar jediničnog kruga). To se vidi i na osnovu impulsnog odziva (na ulazu je Dirakov impuls) koji nije apsolutno sumabilan jer član 5^n nekontrolisano raste vremenom.

5

Zadaci

Prenosna funkcija digitalnog sistema data je kao količnik \mathcal{Z} transformacija izlaznog i ulaznog signala

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5.1)$$

Na osnovu izraza (5.1) određuje se odskočni odziv digitalnog sistema (odziv na jediničnu funkciju - Hevisajdovu funkciju) u frekvencijskom domenu

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \frac{z}{z-1} = H(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (5.2)$$

Impulsni odziv digitalnog sistema (odziv na jedinični impuls - Dirakovu funkciju) u frekvencijskom domenu se dobija iz izraza

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \cdot 1 = H(z) \quad (5.3)$$

Stabilnost digitalnog sistema se lako proverava na osnovu položaja polova prenosne funkcije u z ravni. Potrebno je da polovi funkcije prenosa digitalnog sistema budu unutar jediničnog kruga da bi on bio stabilan.

1. Data je diferencna jednačina digitalnog sistema:

$$y[n] + 0.1y[n-1] - 0.3y[n-2] = x[n]$$

Primenom \mathcal{Z} transformacije odrediti impulsni odziv sistema.

Rešenje:

$$y[n] + 0.1y[n-1] - 0.3y[n-2] = x[n] \quad / \mathcal{Z} \text{ transformacija}$$

$$Y(z) + 0.1Y(z)z^{-1} - 0.3Y(z)z^{-2} = X(z)$$

$$Y(z)(1 + 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2}) = X(z)$$

Prenosna funkcija je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2}} \quad (5.4)$$

Kako je $X(z) = 1$, impulsni odziv digitalnog sistema je

$$Y(z) = H(z) \cdot 1 = \frac{1}{1 + 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2}} \quad (5.5)$$

Određujemo nule polinoma u imeniocu da bi spremili izraz za inverznu \mathcal{Z} transformaciju, metodom razvoja u parcijalne razlomke

$$\begin{aligned} -0.3z^{-2} + 0.1z^{-1} + 1 &= 0 \\ z_{1,2}^{-1} &= \frac{-0.1 \pm \sqrt{0.01 + 1.2}}{-0.6} \\ z_1^{-1} &= -\frac{10}{6} \quad z_2^{-1} = 2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

\mathcal{Z} transformacija izlaznog signala ima oblik

$$Y(z) = \frac{1}{-0.3(z^{-1} - 2)(z^{-1} + \frac{10}{6})} = -\frac{10}{3} \left[\frac{A}{z^{-1} - 2} + \frac{B}{z^{-1} + \frac{10}{6}} \right] \quad (5.7)$$

gde ostaci u polovima imaju vrednosti

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 2} \frac{1}{z^{-1} + \frac{10}{6}} = \frac{3}{11} \\ B &= \lim_{z^{-1} \rightarrow -\frac{10}{6}} \frac{1}{z^{-1} - 2} = -\frac{3}{11} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Izraz (5.8) biće transformisan u pogodan oblik gde će svi elementi izraza moći da budu prepoznati kao \mathcal{Z} transformacija neke od elementarnih funkcija.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left(-\frac{10}{3}\right) \left[\frac{\frac{3}{11}}{z^{-1} - 2} + \frac{-\frac{3}{11}}{z^{-1} + \frac{10}{6}} \right] = \frac{10}{11} \left[\frac{-1}{z^{-1} - 2} + \frac{1}{z^{-1} + \frac{10}{6}} \right] \\ &= \frac{10}{11} \left[\frac{-1}{-2(-0.5z^{-1} + 1)} + \frac{1}{\frac{10}{6}(\frac{6}{10}z^{-1} + 1)} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Na osnovu transformacionog para

$$\frac{1}{(1 - az^{-1})^n} \rightarrow a^n \quad (5.10)$$

datog u tabeli 6.1 se dobija izlazni signal

$$y[n] = \frac{10}{22}(0.5)^n + \frac{10}{11} \frac{6}{10}(-0.6)^n = 0.4545(0.5)^n + 0.5454(-0.6)^n, \quad \text{za } n \geq 0 \quad (5.11)$$

2. Rešiti diferencnu jednačinu

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n], \quad n \geq 0 \quad (5.12)$$

gde je $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u_0[n]$. Poznati su početni uslovi: $y[-1] = 4$ i $y[-2] = 10$.

Rešenje:

Slično tehnici rešavanja diferencijalnih jednačina pomoću Laplasove transformacije biće rešena diferen-

cna jednačina uz pomoć \mathcal{Z} transformacije

$$\begin{aligned}
 y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] &= x[n] && / \mathcal{Z} \text{ Transformacija} \\
 Y(z) - \frac{3}{2}[y[-1] + Y(z)z^{-1}] + \frac{1}{2}[y[-2] + y[-1]z^{-1} + Y(z)z^{-2}] &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \\
 Y(z) \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \right] &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + 4\frac{3}{2} - \frac{10}{2} - \frac{4}{2}z^{-1} \\
 Y(z) &= \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \frac{1 + (1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \\
 Y(z) &= \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \frac{1 + (1 - \frac{1}{4}z^{-1}) - 2z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2}(z^{-1} - 2)(z^{-1} - 1)} \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \\
 &= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}
 \end{aligned}$$

Posle određivanja ostataka u polovima

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 2} \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = 1 \\
 B &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{2}{3} \\
 C &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 4} \frac{2 - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{1}{3}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

dobija se izraz

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \tag{5.14}$$

koji uz pomoć tablice \mathcal{Z} transformacije daje vremenski predstavnik signala y

$$y[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u_0[n] \tag{5.15}$$

$\Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \right] u_0[n]$ je homogeno rešenje jer sadrži polove diskretne mreže

$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u_0[n]$ je partikularno rešenje jer sadrži polove ulaznog niza

Prih 20 odbiraka signala $y[n]$ prikazano je na slici 2.

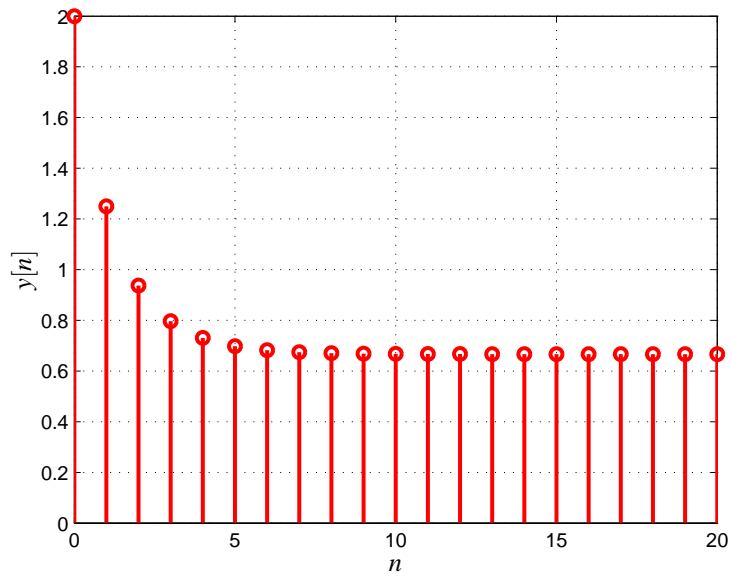
Deo rešenja koji se odnosi na prelazni režim teži nuli kada $n \rightarrow \infty$ i on se odnosi na polove unutar jediničnog kruga. Odziv u ustaljenom stanju sadrži polove na jediničnom krugu i ne zavisi od n .

3. Dati su polovi i nule stabilne diskretne mreže, prikazane na slici 3:

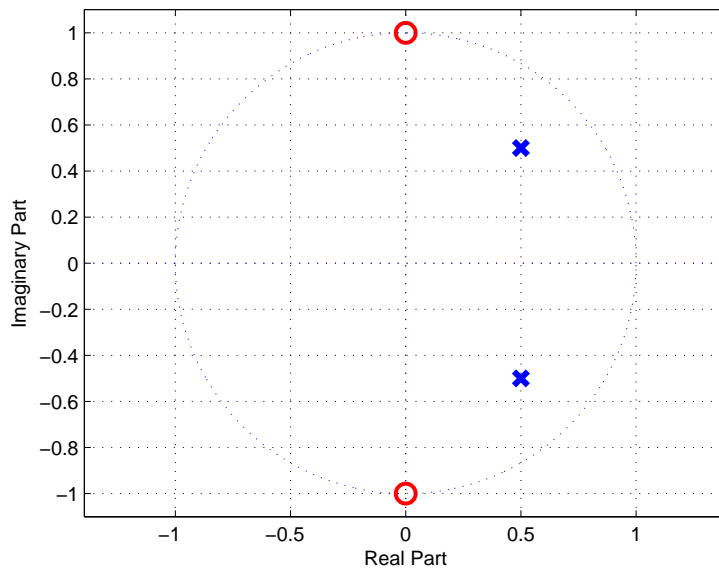
$$z_1 = j \quad z_2 = -j \quad p_1 = -0.5 + j0.5 \quad p_2 = -0.5 - j0.5$$

Poznato je $H(e^{j0}) = 0.8$ (pojačanje za jednosmernu komponentu signala je 0.8 sa nultom fazom)

- Odrediti prenosnu funkciju diskretne mreže;
- Odrediti diferencnu jednačinu diskretne mreže;



Sl. 5.1:



Sl. 5.2:

(c) Odrediti odziv mreže u ustaljenom stanju $y_{ss}(n)$ i odziv prelaznog režima $y_{pr}(n)$ ako je ulazni niz:

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{n\pi}{2} u_0[n]$$

Rešenje:

(a) Prenosna funkcija diskretne mreže na osnovu polova i nula je

$$\begin{aligned} H(z) &= k \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} = k \frac{(z-j)(z+j)}{(z+0.5-j0.5)(z+0.5+j0.5)} \\ &= k \frac{z^2+1}{z^2+z+0.5} \end{aligned}$$

Konstanta k nema uticaj na oblik karakteristike sistema ali utiče na pojačanje sistema. Vrednost ove konstantne biće određena na osnovu datog pojačanja na nultoj frekvenciji. Karakteristika sistema se određuje na frekvencijama koje su u z ravni locirane na jediničnom krugu $z = e^{j\theta}$. Na nultoj frekvenciji ($\theta = 0$) je $z = e^{j0} = 1$, što daje

$$|H(e^{j0})| = 0.8 \Rightarrow 0.8 = |k| \left| \frac{(1-j)(1+j)}{1^2+1+0.5} \right| \quad 0.8 = |k| \frac{2}{2.5} \Rightarrow k = \pm 1 \quad (5.16)$$

Pojačanje sistema iznosi 0.8 i za $k = 1$ i $k = -1$ ali da bi faza na nultoj frekvenciji bila jednaka nuli uzimamo da je $k = 1$ tako da prenosna funkcija glasi

$$H(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z+0.5} \quad (5.17)$$

(b) Deljenjem brojioca i imenioca sa z^2 se dobija

$$H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5.18)$$

odkale se lako inverznom \mathcal{Z} transformacijom dobija diferencna jednačina

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] + x[n-2] \quad (5.19)$$

(c)

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{z^{-2}+1}{\frac{1}{2}z^{-2}+z^{-1}+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z^{-1} \sin \frac{\pi}{2}}{1-2z^{-1} \cos \frac{\pi}{2} + z^{-2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+z^{-2}}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \cdot \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{z^2+z+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Na parcijalne razlomke razlažemo funkciju

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{z^2+z+\frac{1}{2}} \quad (5.20)$$

Uz pomoć MATLAB[®] -a

```
brojilac=[0 0 1/sqrt(2)] % 1/sqrt(2)
imenilac=[1 1 0.5] % z^2+z+0.5
[ostaci,polovi,k]=residue(brojilac,imenilac) % ako je
%polinom u brojiocu nizeg reda onda je k=0
```

dobija se

ostaci =

$$\begin{array}{l} 0.0000 - 0.7071i \\ 0.0000 + 0.7071i \end{array}$$

polovi =

$$\begin{array}{l} -0.5000 + 0.5000i \\ -0.5000 - 0.5000i \end{array}$$

k =

$$[]$$

tako da možemo da pišemo

$$Y(z) = \frac{-j0.707 \cdot z}{z - (-0.5 + j0.5)} + \frac{j0.707 \cdot z}{z - (-0.5 - j0.5)} = \frac{-j0.707 \cdot z}{z - \sqrt{0.5}e^{j3\pi/4}} + \frac{j0.707 \cdot z}{z - \sqrt{0.5}e^{-j3\pi/4}} \quad (5.21)$$

Inverznom \mathcal{L} transformacijom se dobija

$$\begin{aligned} y[n] &= -j0.707 \left(\sqrt{0.5}e^{j3\pi/4} \right)^n + j0.707 \left(\sqrt{0.5}e^{-j3\pi/4} \right)^n \\ &= j0.707 \left(\sqrt{0.5} \right)^n [(-\cos(3n\pi/4) - j\sin(3n\pi/4)) + (\cos(3n\pi/4) - j\sin(3n\pi/4))] \quad (5.22) \\ &= j0.707 \left(\sqrt{0.5} \right)^n [-2j\sin(3n\pi/4)] = 1.4142(0.707)^n \sin(2.356n), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

4. Poznata je prenosna funkcija diskretne mreže $H(z) = \frac{z+1}{z-0.5}$

- Odrediti impulsni odziv;
- Odrediti diferencnu jednačinu diskretne mreže;
- Odrediti odziv na ulazni signal $x[n] = 3 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)u_0[n]$;
- Nacrtati položaj polova i nula diskretne mreže u z ravni.
- Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku sistema i odrediti pojačanje na frekvenciji $F_s/3$.

Rešenje:

Deljenjem brojioca i imenioca sa z (najviši prisutni stepen u brojiocu i imeniocu, kako bi oba polinoma bili u funkciji promenljive z^{-1} (koja ima fizičku interpretaciju (kašnjenje za jedan odbirak) a ne z). Kod određivanja impulsnog odziva na ulazu je $x[n] = \delta[n]$ čija je \mathcal{L} transformacija jednaka jedinici na osnovu čega se dobija

(a)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \\ X(z) = 1 &\rightarrow Y(z) = \frac{(1+z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})} = -2 + \frac{3}{1-0.5z^{-1}} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Rezultat je dobijen deljenjem polinoma (ako su polinomi u brojiocu i imeniocu istog stepena ili je polinom u brojiocu višeg stepena, najpre se pristupa deljenju polinoma a dobijeni ostatak se razlaže na parcijalne razlomke kako bi u tabeli \mathcal{L} transformacije prepoznali odgovarajuće funkcije)

$$\begin{aligned} (z^{-1}+1) : (-0.5z^{-1}+1) &= -2 + \frac{3}{-0.5z^{-1}+1} \\ -z^{-1}+2 & \end{aligned} \quad (5.24)$$

Inverznom Z transformacijom izraza (5.24) se dobija signal y u vremenskom domenu

$$y[n] = -2\delta[n] + 3(0.5)^n \quad (5.25)$$

(b) Na osnovu izraza (5.23) se dobija

$$Y(z)(1 - 0.5z^{-1}) = X(z)(1 + z^{-1}) \quad (5.26)$$

na osnovu čega se dobija diferencna jednačina

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] + x[n-1] \quad (5.27)$$

(c) Uzevši u obzir \mathcal{Z} transformaciju kosinusne funkcije date u tabeli 6.1

$$X(z) = 3 \frac{1 - z^{-1} \cos \frac{\pi}{3}}{1 - 2z^{-1} \cos \frac{\pi}{3} + z^{-2}} = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \quad (5.28)$$

izlazni signal je dat izrazom

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \cdot \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \quad (5.29)$$

dok je u vremenskom domenu dat sa

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \right\} \quad (5.30)$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 + z}{(z^2 - z + 1)z} = \frac{z + 1}{z^2 - z + 1} \quad (5.31)$$

```
brojilac=[0 1 1] % z+1
imenilac=[1 -1 1] % z^2-z+1
[ostaci,polovi,k]=residue(brojilac,imenilac) % ako je
%polinom u brojiocu nizeg reda onda je k=0
```

daje

ostaci =

$$\begin{aligned} &0.5000 - 0.8660i \\ &0.5000 + 0.8660i \end{aligned}$$

polovi =

$$\begin{aligned} &0.5000 + 0.8660i \\ &0.5000 - 0.8660i \end{aligned}$$

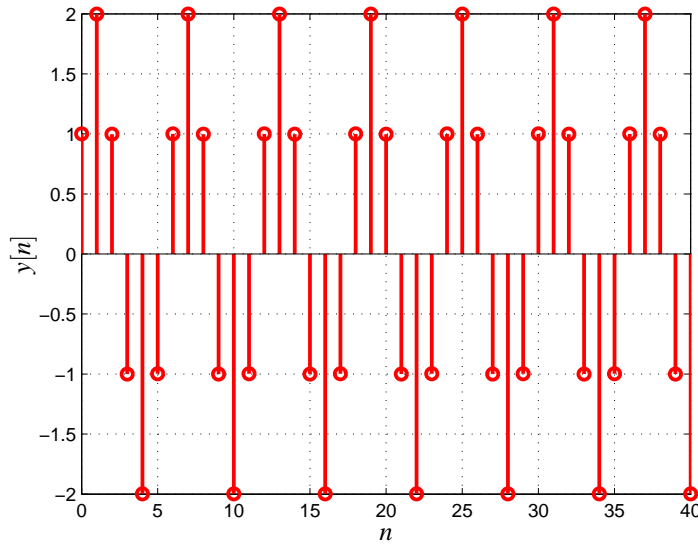
k =

[]

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{(0.5 - j0.866)z}{z - (0.5 + j0.866)} + \frac{(0.5 + j0.866)z}{z - (0.5 - j0.866)} \\ &= \frac{(0.5 - j0.866)z}{z - \sqrt{0.5^2 + 3/4}e^{j\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}}} + \frac{(0.5 + j0.866)z}{z - \sqrt{0.5^2 + 3/4}e^{-j\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}}} \\ &= \frac{(0.5 - j0.866)z}{z - e^{j\pi/3}} + \frac{(0.5 + j0.866)z}{z - e^{-j\pi/3}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= (0.5 - j0.866)e^{jn\pi/3} + (0.5 + j0.866)e^{-jn\pi/3} \\
&= (0.5 - j0.866)[\cos(n\pi/3) + j\sin(n\pi/3)] + (0.5 + j0.866)[\cos(n\pi/3) - j\sin(n\pi/3)] \\
&= 2 \cdot 0.5 \cos(n\pi/3) - 2j^2 0.866 \sin(n\pi/3) \\
&= \cos(n\pi/3) + 1.73 \sin(n\pi/3), \quad n \geq 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Prvih 40 odbiraka signala $y[n]$ prikazano je na slici 4c.



Sl. 5.3:

- (d) Položaj polova i nula je dat na slici 4d. Jedini pol se nalazi unutar jediničnog kruga tako da je sistem stabilan.
- (e) Frekvencijske karakteristike sistema određuju se smenom $z = e^{j\theta}$, s obzirom da se u z ravni frekvencijska osa nalazi na jediničnom krugu. Smenom u izraz

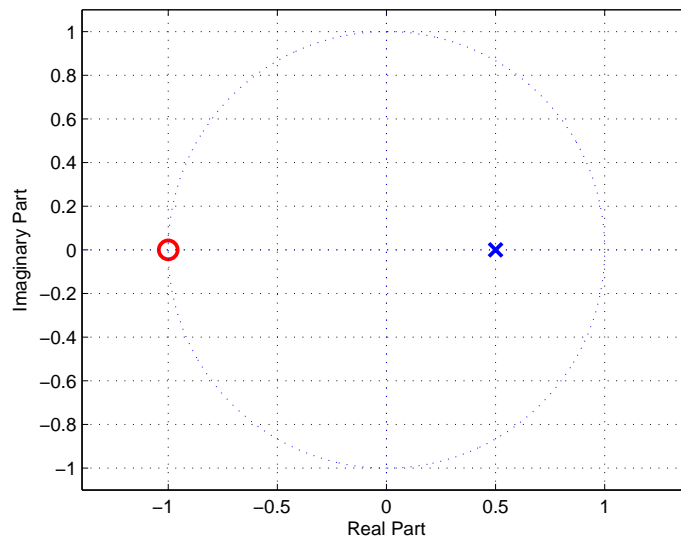
$$H(z) = \frac{z+1}{z-0.5} \text{ se dobija}$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{e^{j\theta} + 1}{e^{j\theta} - 0.5} = \left| H(e^{j\theta}) \right| e^{j\varphi(\theta)} \tag{5.34}$$

odakle prepoznamo amplitudsku karakteristiku

$$\begin{aligned}
\left| H(e^{j\theta}) \right| &= \frac{|e^{j\theta} + 1|}{|e^{j\theta} - 0.5|} = \frac{|\cos(\theta) + j\sin(\theta) + 1|}{|\cos(\theta) - j\sin(\theta) - 0.5|} \\
&= \frac{\sqrt{(\cos(\theta) + 1)^2 + \sin^2(\theta)}}{\sqrt{(\cos(\theta) - 0.5)^2 + \sin^2(\theta)}} = \frac{\sqrt{\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) + 1 + \sin^2(\theta)}}{\sqrt{\cos^2(\theta) - \cos(\theta) + 0.25^2 + \sin^2(\theta)}} \\
&= \frac{\sqrt{2 + 2\cos(\theta)}}{\sqrt{1.25 - \cos(\theta)}}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

kao i faznu karakteristiku



Sl. 5.4:

$$\varphi(\theta) = \arctan \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + 1} - \arctan \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 0.5} \quad (5.36)$$

Iz proporcije

$$F_s : \pi = \frac{F_s}{3} : \theta$$

se dobija da frekvenciji $F_s/3$ [Hz] odgovara digitalna frekvencija

$$\theta = \frac{F_s}{F_s} \pi = \frac{\pi}{3}$$

Smenom u izraze (5.35) i (5.36) se dobija da je pojačanje sistema na frekvenciji $F_s/3$

$$\left| H(e^{j\theta}) \right| = \frac{\sqrt{2 + 2\cos(\pi/3)}}{\sqrt{1.25 - \cos(\pi/3)}} = \frac{1.7321}{0.8660} = 2 \quad (5.37)$$

dok faza ima vrednost

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \arctan \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3) + 1} - \arctan \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3) - 0.5} = \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{0.5 + 1} - \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{0.5 - 0.5} \\ &= 0.5236 - \pi/2 = -1.0472[\text{rad}] \end{aligned} \quad (5.38)$$

Digitalna frekvencija ima vrednosti iz opsega $\vartheta \in [0, \pi]$. Za proizvoljnu frekvenciju θ , vrednosti amplitudske karakteristike i faze se dobijaju smenom konkretne vrednosti θ u izraze (5.35) i (5.36), respektivno. Ove vrednosti jednostavno se dobijaju u MATLAB[®] -u upotrebom naredbe `freqz` kojom se izračunava frekvencijska karakteristika u z ravni. Za konkretni sistem program je:

```
br=[1 1] % 1+z^-1
im=[1 -0.5] % 1-0.5z^-1
% prenosna funkcija tj. koeficijenti polinoma moraju biti
```

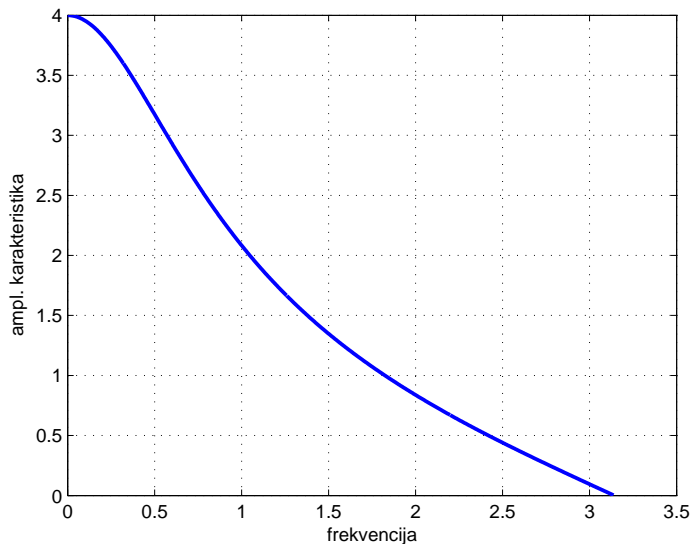
```

% dati po promenljivoj z^-1 a ne preko z
[h,teta]=freqz(br,im,1000); % u vektor h se smesta vrednost
% prenosne funkcije a u vektor teta frekvencije na kojima
% je ona izracunata. Treci argument u naredbi freqz je broj
% tacaka, ekvidistantno rasporedjenih na opsegu od 0 do pi.
figure
plot(teta,abs(h))
grid
xlabel('frekvencija')

ylabel('ampl. karakteristika')
faza = angle(h);
figure plot(teta,faza)
grid
xlabel('frekvencija')
ylabel('faza')

```

a karakteristike su prikazane na slikama 4 i 4.



Sl. 5.5:

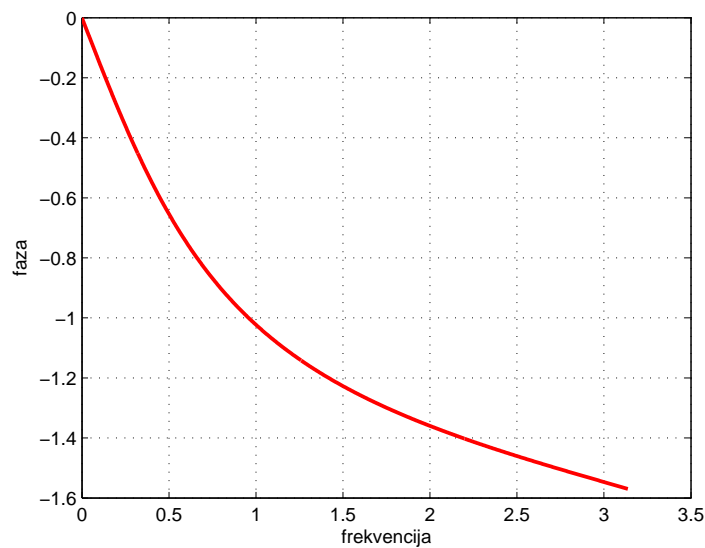
5. Za linearnu, kauzalnu, vremenski nepromenljivu diskretnu mrežu, definisanu diferencnom jednačinom

$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-3]$$

odrediti impulsni odziv mreže, prenosnu funkciju, položaj polova i nula i odziv ako je ulazni niz

$$x[n] = 2(0.9)^n u_0[n]$$

Rešenje: Diferencna jednačina diskretne mreže je: $y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-3]$



Sl. 5.6:

Primenom \mathcal{Z} transformacije na prethodnu jednačinu dobija se

$$Y(z) = \frac{1}{4}X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{1}{4}X(z)z^{-3}$$

Impulsni odziv sistema se dobija za ulazni niz $x[n] = \delta[n]$ tj. $X(z) = 1$ tako da je

$$Y(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-3}$$

Inverznom Z transformacijom se dobija

$$h[n] = y[n] = \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-3]$$

Primećujemo da je impulsni odziv konačne dužine tako da je reč o nerekurzivnom filteru (FIR) kod kojeg izlazni odbirci zavise samo od ulaza ali ne i od prethodnih odbiraka izlaznog signala.

$$h[n] = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} \right\}$$

Prenosna funkcija diskretne mreže je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-3} = \frac{1z^3 + 2z^2 + 1}{4z^3}$$

Rešavanjem jednačine $z^3 + 2z^2 + 1 = 0$ dobijaju se nule diskretne mreže. Korišćenjem MATLAB[®] -a i naredbe roots

```
roots([1 2 0 1])
```

dobija se

$$\begin{aligned} & -2.2056 + 0.0000i \\ & 0.1028 + 0.6655i \\ & 0.1028 - 0.6655i \end{aligned}$$

Rešavanjem jednačine $z^3 = 0$ dobijaju se polovi diskretne mreže (trostruki pol u koordinatnom početku).

Ukoliko se niz

$$x[n] = 2(0.9)^n u_0[n]$$

čija je \mathcal{L} transformacija

$$X(z) = 2 \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$

dovede na ulaz diskretne mreže, odziv je

$$Y(z) = \frac{1}{4} (1 + 2z^{-1} + z^{-3}) \frac{2}{1 - 0.9z^{-1}} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-3}}{2(1 - 0.9z^{-1})} = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{2z^2(z - 0.9)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{2z^3(z - 0.9)} = \frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \frac{D}{z - 0.9}$$

```
br=[1 2 0 1]
im=[2 -1.8 0 0 0]
[r,p,k]=residue(br,im)
```

```
r =
    2.2970
   -1.7970
   -0.6173
   -0.5556
```

```
p =
    0.9000
         0
         0
         0
```

```
k =
    []
```

$$Y(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{2z^2(z - 0.9)} = \frac{-0.5556}{z^2} + \frac{-0.6173}{z} - 1.7970 + \frac{2.2970z}{z - 0.9} \quad (5.39)$$

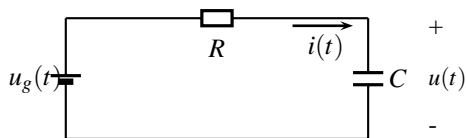
tako da se za izlazni signal dobija

$$y[n] = -1.7970\delta[n] - 0.6173\delta[n-1] - 0.5556\delta[n-2] + 2.2970(0.9)^n, \quad n \geq 0 \quad (5.40)$$

6. Koristeći Ojlerovu aproksimaciju

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{u(t) - U(t-T)}{T}$$

odrediti diskretnu mrežu koja simulira rad RC mreže sa slike 5.7



Sl. 5.7:

Rešenje (I način):

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\frac{du(t)}{dt} \cong \frac{u(t) - u(t-T)}{T}$$

$$u[n] \cong u(t) \big|_{t=nT}$$

$$u[n-1] \cong u(t-T) \big|_{t=nT}$$

$$u_g(t) = Ri(t) + u(t)$$

$$u_g(t) = RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) \quad /RC$$

$$\frac{1}{RC} u_g(t) = \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u(t)$$

$$\frac{1}{RC} u_g[n] = \frac{u[n] - u[n-1]}{T} + \frac{1}{RC} u[n]$$

$$\frac{1}{RC} u_g[n] = u[n] \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{RC} \right) - \frac{1}{T} u[n-1]$$

$$u[n] \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{RC} \right) = \frac{1}{RC} u_g[n] + \frac{1}{T} u[n-1]$$

$$u[n] \frac{RC+T}{RCT} = \frac{1}{RC} u_g[n] + \frac{1}{T} u[n-1] \quad / \cdot \frac{RCT}{RC+T}$$

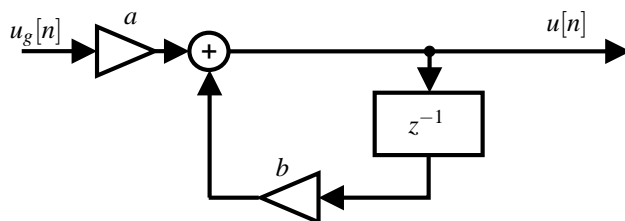
Praktično se došlo do odgovarajuće diferencne jednačine

$$u[n] = \frac{T}{RC+T} u_g[n] + \frac{RC}{RC+T} u[n-1] = au_g[n] + bu[n-1]$$

gde konstante a i b imaju vrednost

$$a = \frac{T}{RC+T} \quad b = \frac{RC}{RC+T}$$

dok je diskretna mreža prikazana na slici 6.



Sl. 5.8:

Rešenje (II način):

Rešavanjem kola u frekvencijskom domenu (primenom Laplasove transformacije) određujemo prenosnu funkciju kola u s domenu

$$U(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} U_g(s) = \frac{1}{1 + sRC} U_g(s)$$

Uvođenjem smene: $s = \frac{1}{T} (1 - z^{-1})$

$$U(z) = \frac{1}{1 + \frac{RC}{T} (1 - z^{-1})} U_g(z)$$

$$U(z) = \frac{T}{T + RC(1 - z^{-1})} U_g(z)$$

$$U(z)T + U(z)RC(1 - z^{-1}) = TU_g(z)$$

$$U(z)(T + RC) = U(z)z^{-1}RC + TU_g(z)$$

$$U(z) = \frac{RC}{T + RC} U(z)z^{-1} + \frac{T}{T + RC} U_g(z)$$

$$u[n] = \frac{RC}{T + RC} u[n-1] + \frac{T}{T + RC} u_g[n]$$

6

Hardverska realizacija prenosne funkcije diskretnog sistema

Tab. 6.1: Z-Transformacija

Signal	Z-Transformacija
$\{\delta[n]\}$	1
$\{\delta[n-m]\}$	z^{-m}
$\{u[n]\}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$\{u[n-m]\}$	$\frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$
$\{(-1)^n h[n]\}$	$\frac{1}{1+z^{-1}}$
$\{n\}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\{a^n\}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$\{na^n\}$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$\{n^2 a^n\}$	$\frac{az^{-1} + a^2 z^{-2}}{(1-az^{-1})^3}$
$\{\sin[n\theta]\}$	$\frac{z^{-1} \sin \theta}{1 - 2z^{-1} \cos \theta + z^{-2}}$
$\{\cos[n\theta]\}$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \theta}{1 - 2z^{-1} \cos \theta + z^{-2}}$
$\{a^n \sin[n\theta]\}$	$\frac{az^{-1} \sin \theta}{1 - 2az^{-1} \cos \theta + a^2 z^{-2}}$
$\{a^n \cos[n\theta]\}$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \theta}{1 - 2az^{-1} \cos \theta + a^2 z^{-2}}$

Prvi korak u realizaciji filtera je određivanje prenosne funkcije $H(z)$. Kao ulazni parametri koriste se granične frekvencije filtera (granice propusnih i nepropusnih opsega) i dozvoljena slabljenja unutar svakog opsega. U propusnim opsezima (propusnik niskih (ili visokih) frekvencija ima samo jedan) je neophodno da pojačanje sistema bude blisko jedinici da bi komponente spektra iz ove oblasti dospele na izlaz sistema (filtera) manje više neizmenjene. Ista karakteristika umesto preko pojačanja (modula amplitudske karakteristike) može biti zadata preko slabljenja, koje je definisano kao $-20\log_{10}(\text{pojaćanje})$, što znači da u idealnom slučaju u propusnom opsegu se želi da obezbedi slabljenje od 0 dB ($-20\log_{10}(1) = 0$). U praksi se idealna karakteristika aproksimira i dozvoljava neko maksimalno slabljenje u propusnom opsegu a_{max} . U mnogom primenama uobičajeno je da unutar propusnog opsega bude dozvoljeno slabljenje do 3 dB. Nepropusni opseg je dobio takvo ime jer na tim frekvencijama je cilj da se na izlazu filtera ne pojave komponente spektra koje su inače prisutne u ulaznom signalu. Dakle u nepropusnom opsegu je u idealnom slučaju pojačanje sistema jednako nuli a u realnom slučaju je blisko nuli. Kako je $-20\log_{10}(0) = \infty$, idealni filter u nepropusnom opsegu ima beskonačno slabljenje. Realni filter će u nepropusnom opsegu imati pojačanje blisko nuli odnosno veliko slabljenje. Na primer, ako je dozvoljeno da pojačanje bude maksimalno 0.001 (umesto idealne nulte vrednosti) takav filter ima slabljenje od bar $-20\log_{10}(0.001) = -20\log_{10}(10^{-3}) = -20 \cdot (-3) = 60$ decibela ($a_{min} = 60$ dB).

Na osnovu zadatih specifikacija rešava se matematički problem u z ravni (ova oblast se izučava unutar drugih predmeta, npr. Obrada audio signala...) koji omogućava da se dobiju koeficijenti polinoma prenosne funkcije. Unutar ovog kursa upoznaćete se sa metodama transformacije prenosne funkcije analognog filtera (određivanje njegove prenosne funkcije je bio matematički problem u s ravni). Koeficijenti filtera se najčešće određuju iterativnim metodama uz pomoć računara. Tačnost koeficijenta je definisana osobinama procesora tj. računara i vrednosti ovih koeficijenata možemo uslovno nazvati idealnim. Crtanjem karakteristike filtera sa dobijenim koeficijentima uveravamo se da su zadovoljene sve zadate specifikacije filtera. Za hardversku realizaciju digitalnog filtera koriste se samo 3 komponente: sabirač, množač i element za kašnjenje (koji unosi kašnjenje od jednog odbirka). Kako su u slučaju digitalnog filtera na ulazu nalaze brojevi (ti brojevi predstavljaju odbirke ulaznog signala) obrada signala se svodi na manipulaciju nad brojevima (sabiranje i množenje). Brojne vrednosti se čuvaju u memoriji a operacija kašnjenja se jednostavno realizuje upotrebom pomeračkog registra. Sama memorija određuje broj bitova koje imamo na raspolaganju za predstavljanje brojnih vrednosti. Praktično su vrednosti idealnih koeficijenata zaokružene i predstavljenje raspoloživim brojem bitova. Posle množenja dva broja broj cifara u razlomljenom delu raste (npr. $1.2 \cdot 1.2 = 1.44$) tako da se rezultat množenja predstavlja raspoloživim brojem bitova tj. mora biti zaokružen. Sve ovo znači da zbog zaokruživanja vrednosti koeficijenata i rezultata množenja realizovani filter ima karakteristiku koja odstupa od idealne (od karakteristike kada se koriste idealne vrednosti za koeficijente). Uticaj zaokruživanja koeficijenta će biti pokazan kasnije na primeru. Degradiranje karakteristike filtera zbog zaokruživanja iziskuje potrebu da se pre hardverske realizacije analizom ustanovi minimalni broj bitova za predstavljanje koeficijenata kako bi dobijena karakteristika bila unutar dozvoljenih granica.

Posle definisanja broja bitova za predstavljanje koeficijenata na raspolaganju je prenosna funkcija koju treba realizovati. Krenuvši od prenosne funkcije moguće je odrediti više struktura koje realizuju isti filter. Na ovom mestu analiziraćemo direktnu, direktnu kanoničnu, kaskadnu i paralelnu realizaciju. Postoje i druge metode za realizaciju ali neće biti obuhvaćene ovim kursom.

6.1 Direktna realizacija

Data je prenosna funkcija diskretne mreže

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} \quad (6.1)$$

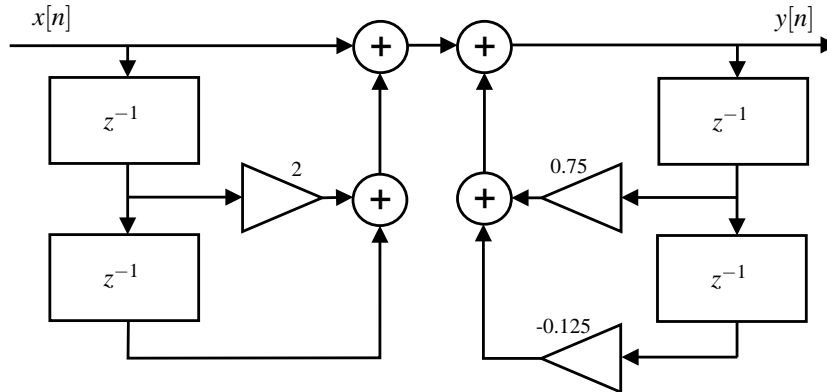
Odrediti strukturu koja odgovara direktnoj realizaciji date prenosne funkcije.

Rešenje : Unakrsnim množenjem i inverznom \mathcal{Z} transformacijom dolazi se do diferencne jednačine

$$\begin{aligned} Y(z)(1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}) &= X(z)(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \\ Y(z) - 0.75z^{-1}Y(z) + 0.125z^{-2}Y(z) &= X(z) + 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$y[n] - 0.75y[n-1] + 0.125y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + 0.75y[n-1] - 0.125y[n-2] \quad (6.3)$$



Sl. 6.1: Direktna realizacija

Diferencna jednačina pokazuje da odbirak izlaznog signala $y[n]$ zavisi od trenutno prisutnog odbirka ulaznog signala $x[n]$ ali i od prethodnih odbiraka ulaznog i izlaznog signala. Direktnom implementacijom diferencne jednačine (6.3) dolazi se do strukture prikazane na slici 6.1.

U opštem slučaju, prenosna funkcija reda N ima oblik

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Nz^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (6.4)$$

i u strukturi za realizaciju filtra se upravo pojavljuju množači koji odbirke ulaznog signala $x[n-k]$ množe sa b_k , $k = 0, 1, \dots, N$ a odbirke izlaznog signala $y[n-k]$ množe sa a_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Odavde zaključujemo da je u opštem slučaju za direktnu realizaciju prenosne funkcije neophodno ukupno $2N + 1$ množača. Naravno, ako su neki od koeficijenata jednaki nuli ili jedinici broj neophodnih množača biće umanjen za njihov broj. Na primer za prenosnu funkciju drugog reda potrebno je $2N + 1 = 5$ množača. U datom primeru je $b_0 = b_2 = 1$, tako da je za realizaciju potrebno 3 množača, kako je prikazano na slici 6.1.

Ako je na ulazu elementa za kašnjenje prisutan signal $x[n]$ ($y[n]$) na njegovom izlazu se dobija $x[n-1]$ ($y[n-1]$). Ako se ovi signali dovedu na naredni element za kašnjenje, kao na slici 6.1, na izlazu su dostupni odbirki $x[n-2]$ ($y[n-2]$). Za prenosnu funkciju drugog reda, kao u datom primeru, potrebna su dva elementa za kašnjenje za čuvanje poslednja dva odbirka ulaznog signala kao i još dva za potrebe izlaznog signala. U opštem slučaju prenosne funkcije reda N realizacija zahteva $2N$ elemenata za kašnjenje.

Sabirač na svom izlazu daje sumu dva broja prisutna na njegovim ulazima. Kada se navodi broj neophodnih sabirača za realizaciju nekog filtra podrazumeva se da je reč o dvoulaznim sabiračima. Da bi sabrali 3 broja neophodna su 2 sabirača. Prvi će odrediti sumu dva ulazna broja a drugi toj sumi dodaje treći broj. Svaki dodatni broj za sabiranje zahteva novi sabirač. Polinom reda N ima $N + 1$ koeficijent (b_0, b_1, \dots, b_N). Pri realizaciji filtra drugog reda potrebno je sabirati 3 (tj. $N + 1$) odbirka ulaznog signala i 2 (N) odbirka izlaznog signala. Dakle, broj potrebnih dvoulaznih sabirača za realizaciju prenosne funkcije reda N iznosi $2N$.

Množač je kompleksnija komponenta od sabirača. Množač zbog toga zahteva primetno više energije a kod realizacije na čipu neophodan je veći prostor za njegovu implementaciju. Neki digitalni uređaji ne koriste stalno napajanje (rade na baterije). U tom slučaju je od interesa pri implementaciji filtra odabrati strukturu koja zahteva minimalni broj množača kako bi se produžilo vreme autonomnog rada (duži vek trajanja baterije).

Literatura