

UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Zbirka zadataka

NIŠ, 2020.

Sadržaj

1	Kontinualno-diskretne transformacije	5
	Literatura	25
	Indeks pojmova	25

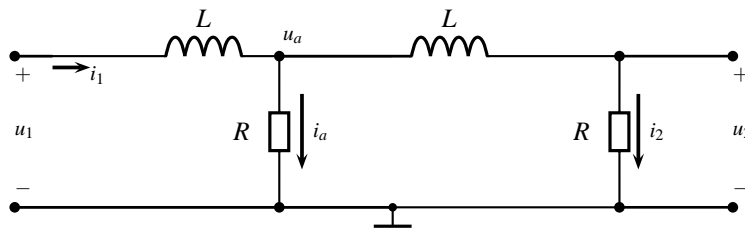
1

Kontinualno-diskretne transformacije

1. Za kolo sa slike 1.1 odrediti prenosnu funkciju $G = \frac{u_2}{u_1}$ u z domenu i simulirati kolo sa slike:

- (a) Transformacijom izvoda
- (b) Impulsno-invarijantnom transformacijom
- (c) Bilinearnom transformacijom;

ako je $T = 0.1$ s i $L/R = 2$ s.



Sl. 1.1:

Rešenje:

Kolo rešavamo primenom Laplasove transformacije, u frekvencijskom domenu. Usvojicemo označavanje da npr. promenljivoj $u_1(t)$ u vremenskom domenu odgovara $U_1(s)$ u frekvencijskom domenu. Kroz otpornik R i kalem L u desnom delu kola teče ista struja i_2 , tj. važi

$$I_2(s) = \frac{U_2(s)}{R} = \frac{U_a(s) - U_2(s)}{sL} \quad (1.1)$$

$$U_2(s) sL = RU_a(s) - RU_2(s)$$

$$U_2(s) (sL + R) = RU_a(s)$$

$$U_a(s) = U_2(s) \frac{R + sL}{R} \quad (1.2)$$

Struja kroz otpornik ima vrednost

$$I_a(s) = \frac{U_a(s)}{R} \quad (1.3)$$

dok se struja na ulaznom delu kola može odrediti iz izraza

$$I_1(s) = \frac{U_1(s) - U_a(s)}{sL} \quad (1.4)$$

Na osnovu prvog Kirhofovog zakona za centralni čvor važi

$$I_1(s) = I_a(s) + I_2(s) \quad (1.5)$$

što dato preko ulaznog i izlaznog napona poprima oblik

$$\frac{U_1(s) - U_a(s)}{sL} = \frac{U_a(s)}{R} + \frac{U_a(s) - U_2(s)}{sL} \quad (1.6)$$

Levu i desnu stranu izraza (1.6) množimo sa sRL

$$RU_1(s) - RU_a(s) = sLU_a(s) + RU_a(s) - RU_2(s)$$

Sređivanjem ovog izraza i smenom $U_a(s)$ na osnovu (1.2) se dobija

$$RU_1(s) + RU_2(s) = (2R + sL)U_2(s) \frac{R + sL}{R} \quad (1.7)$$

Izraz (1.7) množimo sa R

$$R^2U_1(s) + R^2U_2(s) = U_2(s) (2R^2 + 2sRL + RsL + s^2L^2) \quad (1.8)$$

čime se dobija

$$R^2U_1(s) = U_2(s) (R^2 + 3sRL + s^2L^2) \quad (1.9)$$

Prenosna funkcija analognom kola (odnos izlaznog i ulaznog napona, praktično je reč o naponskom pojačanju) je data izrazom

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R^2}{R^2 + 3sRL + s^2L^2} = \frac{1}{1 + 3s\frac{L}{R} + s^2\frac{L^2}{R^2}}$$

odnosno, uzevši u obzir date vrednosti parametara kola, dobija se

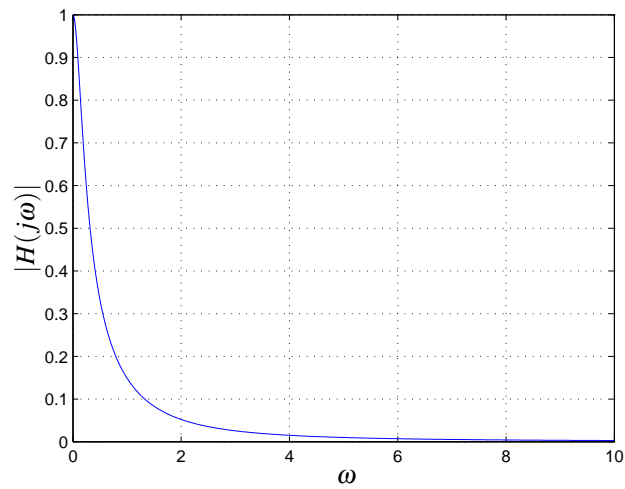
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + 6s + 4s^2} \quad (1.10)$$

Amplitudska karakteristika ovog sistema prikazana je na slici 1.2.

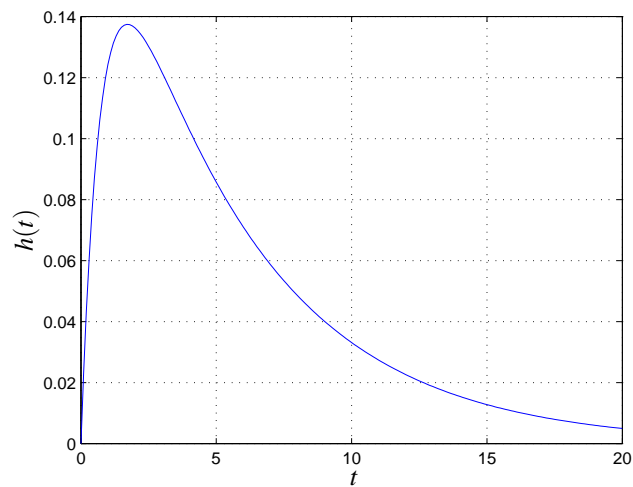
Impulsni odziv ovog sistema prikazan je na slici 1.3. Diskretne mreže mogu imati beskonačni impulsni odziv -IIR (rekurzivni) ili konačni impulsni odziv - FIR (nerekurzivni). FIR sistemi se projektuju direktno u z domenu i ne mogu biti dobijeni transformacijama krenuvši od prenosne funkcije nekog analognog sistema. Primenom analogno-diskretnog preslikavanja prenosna funkcija analogne mreže se preslikava u odgovarajuću IIR prenosnu funkciju. Praktično se kompleksna s ravan preslikava u kompleksnu z ravan.

Preslikavanje iz kontinualnog prostora (s ravan) u diskretni prostor (z ravan) treba da ispuni određene zahteve:

- Imaginarna osa ($j\omega$ osa) iz s ravni se preslikava na jedinični krug u z ravni.
- Leva s -poluravan se preslikava u unutrašnjost jediničnog kruga u z ravni.



SI. 1.2: Amplitudska karakteristika analognog sistema



SI. 1.3: Impulsni odziv analognog sistema

(a) Transformacija izvoda:

Kontinualne mreže su jednoznačno opisane diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima koji zavise od parametara same mreže oblika

$$\sum_{k=0}^N b_{N-k} \frac{d^{N-k} y(t)}{dt^{(N-k)}} = \sum_{k=0}^M a_{M-k} \frac{d^{(M-k)} x(t)}{dt^{(M-k)}} \quad (1.11)$$

gde su b_i i a_j konstantni koeficijenti. Diskretizacija analogne mreže zasniva se na transformaciji diferencijalne jednačine diskretizacijom izvoda unazad na sledeći način

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &\leftrightarrow \frac{1}{T} [y[n] - y[n-1]] \\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} &\leftrightarrow \frac{1}{T} \left[\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dy(t-1)}{dt} \right] = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{T} (y[n] - y[n-1]) - \frac{1}{T} (y[n-1] - y[n-2]) \right] \\
&= \frac{1}{T^2} [y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]] \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Zamenom ovih izvoda u diferencijalnu jednačinu (1.11) dobija se rekurzivna diferencna jednačina koja opisuje diskretnu mrežu sa beskonačnim impulsnim odzivom

$$\sum_{k=0}^N b_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M a_k x[n-k] \tag{1.13}$$

Uzevši u obzir osobine Laplasove i z transformacije prvog jednačini iz izraza (1.12) odgovara veza

$$s = \frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \tag{1.14}$$

odnosno (pogledati osobine Laplasove transformacije: izvod iz vremenskog domena se pretvara u množenje sa s u frekvencijskom domenu)

$$z = \frac{1}{1 - sT} \tag{1.15}$$

Na osnovu izraza (1.14) i (1.15) se se može uočiti da se imaginarna osa iz s ravni preslikava u z ravan na krug poluprečnika 0.5 sa centrom u (0.5,0). Kao što vidimo preslikavanje izvoda ne ispunjava prvi od dva uslova koje analogno-diskretne transformacije treba da zadovolje.

Prenosna funkcija diskretne mreže biće dobijena uvođenjem smene date izrazom (1.14)

$$\begin{aligned}
\frac{U_2(z)}{U_1(z)} &= \frac{1}{1 + 6\frac{1}{T}(1 - z^{-1}) + 4\frac{1}{T^2}(1 - z^{-1})^2} = \frac{1}{4\frac{1}{T^2}(1 - z^{-1})^2 + 6\frac{1}{T}(1 - z^{-1}) + 1} \\
&= \frac{T^2}{4(1 - z^{-1})^2 + 6T(1 - z^{-1}) + T^2}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
U_1(z)T^2 &= 4(1 - 2z^{-1} + z^{-2})U_2(z) + 6T(1 - z^{-1})U_2(z) + T^2U_2(z) \\
&= 4U_2(z) - 8U_2(z)z^{-1} + 4U_2(z)z^{-2} + 6TU_2(z) - 6TU_2(z)z^{-1} + T^2U_2(z) \\
U_2(z)(4 + 6T + T^2) &= U_1(z)T^2 + U_2(z)z^{-1}(8 + 6T) - 4U_2(z)z^{-2}
\end{aligned}$$

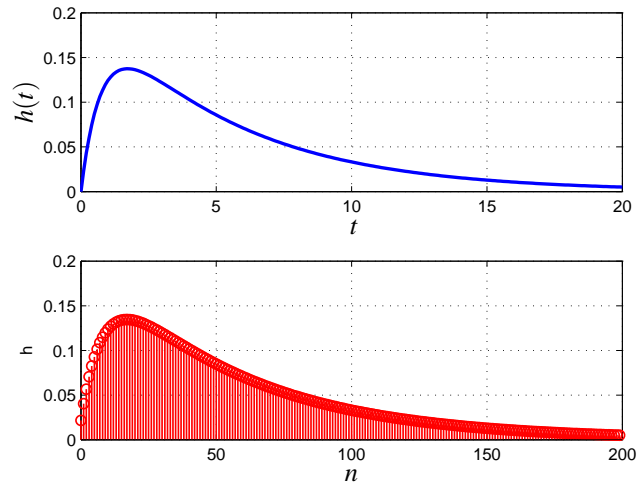
smenom $T = 0.1$ se dobija

$$\frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{z^2}{400 - 860z + 461z^2} = \frac{1/461}{1 - \frac{860}{461}z^{-1} + \frac{400}{461}z^{-2}} \tag{1.17}$$

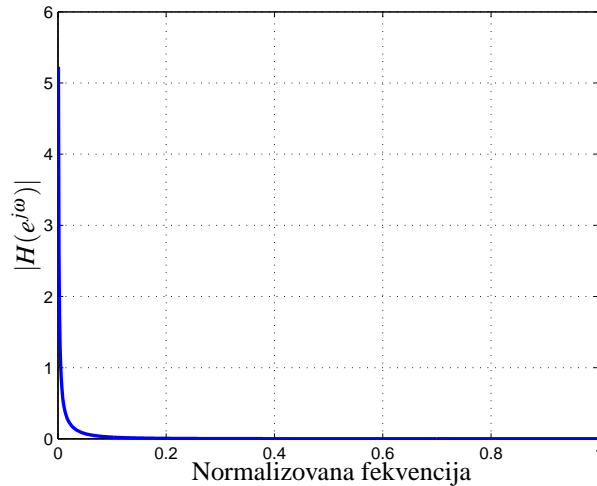
Na slici 1.4 je prikazan impulsni odziv diskretnog sistema dobijen preslikavanjem izvoda.

Amplitudska karakteristika diskretnog sistema je prikazana na slici 1.5.

Dobijeni di Uobičajeno je da se prenosna funkcija diskretne mreže daje kao odnos polinoma po promenljivoj z^{-1} , s obzirom da član z^{-k} ima fizičku interpretaciju tj. ukazuje na kašnjenje diskretnog signala za k odbiraka (za k taktnih intervala). Sve naredbe u MATLAB[®] -u koje se odnose na obradu diskretnih (digitalnih) signala očekuju da kod navođenja koeficijenata prenosne funkcije sistema konstanta polinoma iz imenioca ima vrednost jedan, kao u izrazu (1.17).



Sl. 1.4: Impulsni odziv analognog sistema a) i diskretnog sistema b).



Sl. 1.5: Amplitudska karakteristika diskretnog sistema.

(b) Impulsno-invarijantna transformacija:

Impulsno-invarijantna transformacija kontinualne mreže u odgovarajuću diskretnu mrežu se zasniva na diskretizaciji impulsnog odziva kontinualne mreže. U diskretnim trenucima vremena (celobrojni umnožci perioda odabiranja kT_s) impulсни odziv diskretne mreže ima vrednost koja je identična impulsnom odzivu kontinualne mreže u tim trenucima. Impulsni odziv $h_c(t)$ kontinualne mreže je inverzna Laplasova transformacija prenosne funkcije te mreže $H_c(s)$, odnosno $h_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\}$.

Inverzna Laplasova transformacija prenosne funkcije kontinualne mreže se odeduje razvojem u parcijalne razlomke (pretpostavimo da je zadovoljen uslova da je polinom u brojiocu nižeg reda od polinoma u imeniocu), tako da prenosna funkcija može biti data u obliku

$$H_c(s) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{s - p_i} \quad (1.18)$$

gde N predstavlja red polinoma u imeniocu, p_i su polovi prenosne funkcije a r_i odgovarajući ostaci u tim polovima. Izraz (1.18) je dat pod uslovom da su svi polovi prosti. Nakon razvoja u parcijalne razlomke na osnovu tabele koja sadrži Laplasove transformacione parove elementarnih funkcija, lako se dolazi do impulsnog odziva kontinualne mreže

$$h_c(t) = \sum_{i=1}^N r_i e^{p_i t} u_0(t) \quad (1.19)$$

gde je sa $u_0(t)$ označena Hevisajdova funkcija, kojom je obezbeđeno da je impulsni odziv mreže jednak nuli za $t < 0$. Odmeravanjem impulsnog odziva sa periodom odmeravanja T_s dobija se niz odbiraka

$$\{h_c(nT_s)\} = T_s h_c(t)|_{t=nT_s} \quad (1.20)$$

a \mathcal{Z} transformacijom ovog niza dolazi se do prenosne funkcije $H(z)$ diskretnog sistema

$$H(z) = \sum_{i=1}^N T_s r_i \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_i T_s} z^{-1})^n = \sum_{i=1}^N \frac{T_s r_i}{1 - z^{-1} e^{p_i T_s}} \quad (1.21)$$

odkale su uočava da svakom prostom polu odgovara smena

$$\frac{r_i}{s - p_i} \rightarrow \frac{T_s r_i}{1 - z^{-1} e^{p_i T_s}} \quad (1.22)$$

U slučaju da su polovi višestruki, reda m , potrebno je transformisati ih u sledeći oblik

$$\frac{r_i}{(s - p_i)^m} \rightarrow \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} \left(\frac{r_i}{s-a} \right) \Big|_{a=p_i} \quad (1.23)$$

što uz korišćenje transformacije (1.22) daje

$$\frac{r_i}{(s - p_i)^m} \rightarrow \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}} \left(\frac{T_s r_i}{1 - e^{a T_s} z^{-1}} \right) \Big|_{a=p_i} \quad (1.24)$$

Dakle u slučaju dvostrukog pola koristimo smenu

$$\frac{r_i}{(s - p_i)^2} \rightarrow \frac{d}{da} \left(\frac{T_s r_i}{1 - e^{a T_s} z^{-1}} \right) \Big|_{a=p_i} \quad (1.25)$$

Analizom impulsno invarijantne transformacije se uočava da se odsečak $j\omega$ ose na intervalu $[-\pi/T, \pi/T]$ preslikava na jedinični krug a horizontalna traka iz leve poluravni s ravni visine $2\pi/T$ u unutrašnjost jediničnog kruga. (Ovo važi i za traku na opsegu $[\pi/T, 3\pi/T]$ itd. Veza između analogne frekvencije ω i digitalne frekvencije $\theta = \omega T_s$ je linearna, odnosno $\theta = 2\pi f/F_s$. Dakle ako je impulsni odziv kontinualnog sistema frekvencijski ograničen, amplitudska i fazna karakteristika kontinualnog sistema su u potpunosti očuvane preslikavanjem na osnovu impulsno invarijantne transformacije. Zaključujemo da impulsno invarijantna transformacija zadovoljava oba navedena uslova.

U z ravni frekvencijska osa se nalazi na jediničnom krugu (nije više beskonačne dužine) a frekvencijski odziv diskretne mreže dobijen impulsno invarijantnom transformacijom je zbir periodično ponovljenih frekvencijskih spektara kontinualne mreže. Zato, ako je frekvencijski odziv kontinualne mreže ograničen a frekvencija odmeravanja bar dva puta viša od najviše nenulte komponente u spektru, tada se frekvencijski odziv diskretne mreže razlikuje samo za multiplikativnu konstantu od frekvencijskog odziva kontinualne mreže (očuvan oblik).

ova metoda vodi računa samo o polovima prenosne funkcije a ne i o nulama i njihovo preslikavanje nije obostrano jednoznačno. Svaka tačka iz s ravni se jednoznačno preslikava u z ravan obrnuto ne važi. Jedna tačka iz z ravni se preslikava u skup tačka koje leže na pravoj koja je paralelna sa imaginarnom osom u s ravni.

Ovu transformaciju koristimo za projektovanje diskretnih sistema kod kojih nam je bitan impulsni odziv (koji je očuvan pri diskretizaciji) a nije bitna selektivnost frekvencijske karakteristike (jer se ona može puno razlikovati od karakteristike analognog polaznog sistema). Ovako možemo projektovati filtre propusnike niskih frekvencija i propusnike opsega frekvencija jer su njima opsezi konačne širine i može se odabrati adekvatna frekvencija odabiranja. Filtri propusnici visokih frekvencija i nepropusnici opsega frekvencija ne mogu biti projektovani ovom metodom jer dolazi do preklapanja spektra (napomenuli smo da se periodično ponavlja kod diskretnih sistema).

U prvom koraku se određuju polovi prenosne funkcije analognog sistema i proverava da li su prosti ili višestruki kako bi adekvatno bili preslikani u z ravan.

$$\begin{aligned}
 4s^2 + 6s + 1 &= 0 \\
 s_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 16}}{8} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4} \\
 \frac{1}{4s^2 + 6s + 1} &= \frac{1}{4 \left(s + \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right) \left(s + \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right)} = \frac{A}{s + \frac{3+\sqrt{5}}{4}} + \frac{B}{s + \frac{3-\sqrt{5}}{4}} \\
 A &= \lim_{s \rightarrow -\frac{3+\sqrt{5}}{4}} \frac{1}{4 \left(s + \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right)} = \frac{1/4}{-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} = -0.22 \\
 B &= \lim_{s \rightarrow -\frac{3-\sqrt{5}}{4}} \frac{1}{4 \left(s + \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right)} = \frac{1/4}{-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = 0.22
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Na osnovu izraza (1.22) se dobija

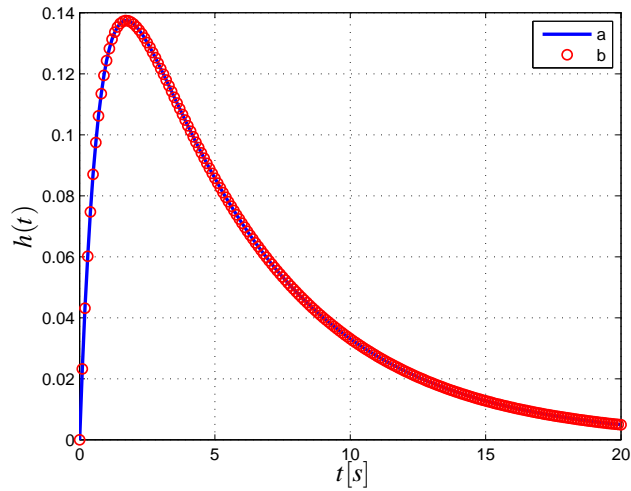
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4s^2 + 6s + 1} &= \frac{\frac{-1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3+\sqrt{5}}{4}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3-\sqrt{5}}{4}} \\
 \frac{\frac{-1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3+\sqrt{5}}{4}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}}{s + \frac{3-\sqrt{5}}{4}} &\rightarrow \frac{T \left(\frac{-1}{2\sqrt{5}} \right)}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}T}} + \frac{T \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \right)}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{4}T}} \\
 H(z) &= \frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{1}{10} \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\frac{-1}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}T}} + \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{4}T}} \right]
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Smenom $T = 0.1$ i u članu u zagradi se dobija

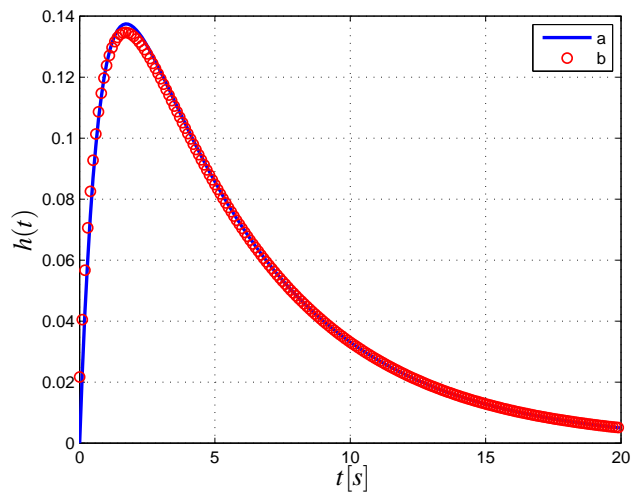
$$\begin{aligned}
 H(z) &= 0.022 \left[\frac{-1}{1 - 0.877z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.981z^{-1}} \right] \\
 &= 0.022 \frac{(-1 + 0.981z^{-1}) + (1 - 0.877z^{-1})}{(1 - 0.877z^{-1})(1 - 0.981z^{-1})} \\
 &= 0.022 \frac{0.104z^{-1}}{1 - 1.86z^{-1} + 0.86z^{-2}} \\
 &= \frac{0.0023z^{-1}}{1 - 1.86z^{-1} + 0.86z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Impulsni odziv diskretnog sistema je prikazan na slici 1.6. Na istoj slici je dat i impulsni odziv analognog sistema kako bi se lakše uočilo da odbirci impulsnog odziva diskretnog sistema imaju upravo istu vrednost kao i polazni analogni sistem u odgovarajućem trenutku kT_s , gde je k ceo broj. Na slici je na x osi dato vreme u sekundama. Kako je period odabiranja $T_s = 0.1s$ u prvih 20 sekundi postoji 200 odbiraka i svi su oni na slici prikazani samo na praktično n osi nisu navedeni redni brojevi odbiraka.

Da bi bilo jasnije na slici 1.7 je još jednom prikazan impulsni odziv sistema dobijen preslikavanjem izvoda gde se vidi da ne postoji preklapanje odziva kao na slici 1.6.



Sl. 1.6: Impulsni odziv analognog a) i diskretnog sistema b) dobijenog impulsno invarijantnom transformacijom.



Sl. 1.7: Impulsni odziv analognog a) i diskretnog sistema b) dobijenog preslikavanjem izvoda.

(c) Bilinearna transformacija

Primenom bilinearne transformacije preslikavaju se prenosne funkcije iz kontinualnog domena u diskretni bez preklapanja spektra, što je osnovna mana impulsno invarijantne transformacije. s ravan se preslikava u z ravan uvođenjem smene

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (1.29)$$

gde je $2/T_s$ konstanta i može imati i neku drugu vrednost.

Inverzna bilinearna transformacija je data sa

$$z = \frac{1 + \frac{T_s}{2}s}{1 - \frac{T_s}{2}s} \quad (1.30)$$

odakle se lako određuje gde se tačke iz s ravni preslikavaju u z ravan. Za razliku od impulsno invarijantne transformacije gde se parče $j\omega$ ose dužine $2\pi/T_s$ preslikavalo na ceo jedinični krug, kod bilinearne transformacije tek cela $j\omega$ osa se smesti na jedinični krug. Dakle i sada je nulta frekvencija na mestu $z = 1$ ali u tački $z = -1$ nije prisutna frekvencija π/T_s već ∞ .

Sada veza između analogne frekvencije ω i digitalne frekvencije θ (gde je $z = e^{j\theta}$) nije linearna, što je mana ove transformacije. To znači da ako se krene od prenosne funkcije analognog sistema koja ima linearnu fazu, dobiće se diskretni sistem u kome je faza nelinearna i samim tim zahtevaće fazni korektor. Na osnovu izraza (1.30) se lako dolazi do veze

$$\omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\theta}{2} \quad (1.31)$$

odnosno

$$\theta = 2 \arctan \frac{\omega T_s}{2} \quad (1.32)$$

Bilinearna transformacija ispunjava oba uslova transformacije kontinualnog prostora u diskretni. Mana je izraza zena nelinearnost jer se cela imaginarna osa iz s ravni preslika na segment $-\pi < \theta < \pi$.

Dakle krenuvši od prenosne funkcije analognog sistema

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + 6s + 4s^2} \quad (1.33)$$

korišćenjem smene (1.29) se dobija prenosna funkcija diskretnog sistema

$$\begin{aligned} \frac{U_2(z)}{U_1(z)} &= \frac{1}{4 \frac{4}{T^2} \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + 6 \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})} + 1} / * \left((1+z^{-1})^2 T^2 \right) \\ &= \frac{T^2 (1+z^{-1})^2}{16(1-2z^{-1}+z^{-2}) + 12T(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + T^2(1+z^{-1})^2} \\ &= \frac{T^2(z^{-2} + 2z^{-1} + 1)}{16 - 32z^{-1} + 16z^{-2} + 12T - 12Tz^{-2} + T^2 + 2T^2z^{-1} + T^2z^{-2}} \\ &= \frac{T^2(z^{-2} + 2z^{-1} + 1)}{z^{-2}(16 - 12T + T^2) + z^{-1}(2T^2 - 32) + 16 + T^2 + 12T} / * 100 \\ &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{100(17.21 - 31.98z^{-1} + 14.81z^{-2})} = \frac{0.00058 + 0.00116z^{-1} + 0.00058z^{-2}}{1 - 1.858z^{-1} + 0.86z^{-2}} \end{aligned}$$

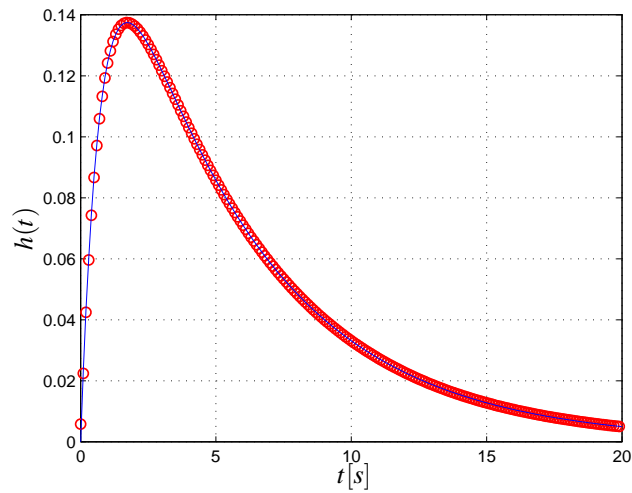
Impulsni odziv diskretnog sistema je prikazan na slici 1.8.

2. Dat je impulsni odziv nerekurzivnog (FIR) digitalnog filtra $\{h[n]\} = \{1, 2, -2, -1\}$. Odrediti prenosnu funkciju filtra i odrediti:

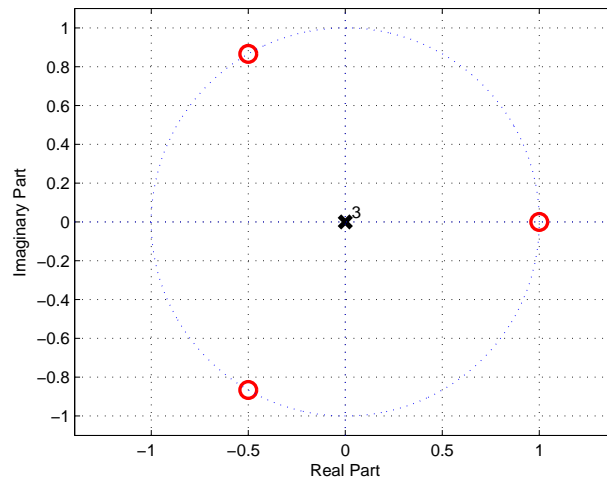
- Amplitudsku i faznu karakteristiku filtra;
- Grupno kašnjenje filtra;
- Odrediti prenosnu funkciju filtra za koji je položaj polova i nula u z ravni dat na slici 1.9.

Rešenje:

Impulsni odziv je prikazan na slici 1.10. Nerekurzivni filtri ne mogu biti projektovani ni jednom od metoda preslikavanja date prenosne funkcije analognog sistema jer se na taj način uvek dobija IIR sistem (filar). FIR filtri se projektuju direktno u z domenu. Karakteriše ih mogućnost realizacije idealne linearne fazne karakteristike. Da bi se to obezbedilo potrebno je da impulsni odziv bude simetričan ili



Sl. 1.8: Impulsni odziv diskretnog sistema a) dobijenog bilinearnom transformacijom i analognog b) .



Sl. 1.9: Nule i polovi diskretnog sistema) .

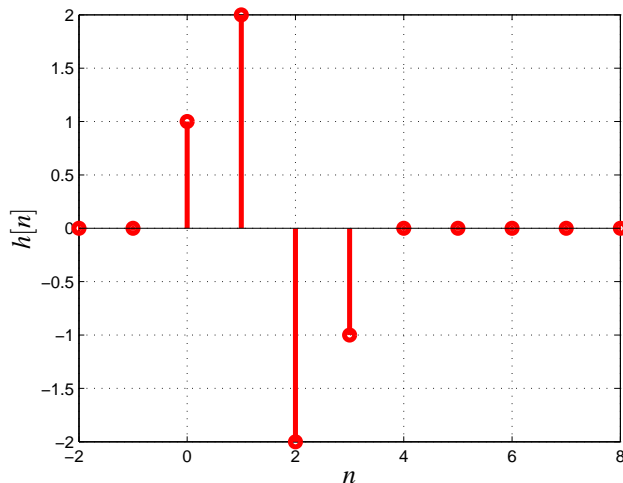
antisimetričan, kao u datom primeru. Ako je data amplitudska karakteristika koju treba zadovoljiti a faza nije od značaja uvek se projektuje IIR filter jer će red filtra biti značajno niži od odgovarajućeg FIR filtra sa istom (sličnom) amplitudskom karakteristikom. Međutim u nekim praktičnim aplikacijama nisu dozvoljena fazna izobličenja i FIR filteri u takvim slučajevima nalaze svoju primenu.

Kako član z^{-k} ukazuje na kašnjenje za k odbiraka (u vremenskom domenu kašnjenje iznosi kT_s), \mathcal{Z} transformacijom se lako dolazi do prenosne funkcije FIR filtra, krenuvši od njegovog impulsnog odziva $h[n]$ s obzirom da je $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 2z^{-2} - z^{-3} \quad (1.34)$$

Kako je frekvencijska osa u z ravni smeštena na jediničnom krugu čije su sve tačke date sa

$$z = e^{j\theta}$$



Sl. 1.10: Impulsni odziv FIR filtra).

, ge je θ ugao između realne ose i potega iz koordinatnog početka do posmatrane tačke, frekvencijske karakteristike filtra se određuju kao

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\theta}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\theta}} = 1 + 2e^{-j\theta} - 2e^{-j2\theta} - e^{-j3\theta} \\
 &= 1 - e^{-j3\theta} + 2(e^{-j\theta} - e^{-j2\theta}) \\
 &= e^{-j3\frac{\theta}{2}} (e^{j3\frac{\theta}{2}} - e^{-j3\frac{\theta}{2}}) + 2e^{-j3\frac{\theta}{2}} (e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}}) \\
 &= e^{-j3\frac{\theta}{2}} 2j \sin(3\frac{\theta}{2}) + 2e^{-j3\frac{\theta}{2}} 2j \sin(\frac{\theta}{2}) \\
 &= e^{-j3\frac{\theta}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} 2 \left(\sin(3\frac{\theta}{2}) + 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \right) \\
 &= 2 \left(\sin(3\frac{\theta}{2}) + 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \right) e^{j\frac{\pi-3\theta}{2}}
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Svaka kompleksna vrednost može biti data preko modula i faznog ugla tj.

$$H(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})| e^{j\varphi(\theta)} \tag{1.36}$$

(a) Dakle, amplitudska karakteristika filtra je data izrazom

$$|H(e^{j\theta})| = 2 \left(\sin(3\frac{\theta}{2}) + 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \right) \tag{1.37}$$

dok fazna karakteristika ima vrednost

$$\varphi(\theta) = \arg \{ H(e^{j\theta}) \} = \frac{\pi - 3\theta}{2} \tag{1.38}$$

(b) Grupno kašnjenje filtra je definisano kao negativni izvod po frekvenciji fazne karakteristike, odnosno

$$\tau(\theta) = -\frac{d}{d\theta} \varphi(\theta) = \frac{3}{2} \tag{1.39}$$

Sa slike 1.9 uočavamo da je pol trostruki u koordinatnom početku i da filter poseduje tri nule z_i locirane na jediničnom krugu. Realna nula je pod uglom 0 a konjugovano kompleksni par nula je opod uglom $\pm 2\pi/3$

(c)

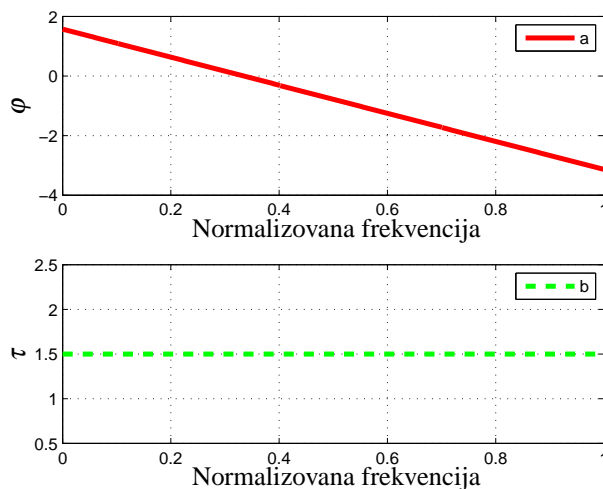
$$\begin{aligned}
 z_1 &= 1e^{j0} = 1 \\
 z_2 &= e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 z_3 &= e^{mj\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Krenuvši od polova i nula za prenosnu funkciju se dobija

$$\begin{aligned}
 H(z) &= k \frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}{(z-0)^3} = k \frac{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z^3} \\
 &= k \frac{(z-1)\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}{z^3} = k \frac{(z-1)\left(z^2+z+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}{z^3} \\
 &= k \frac{(z-1)(z^2+z+1)}{z^3} = k \frac{z^3+z^2+z-z^2-z-1}{z^3} \\
 &= k \frac{z^3-1}{z^3} = k(1-z^{-3})
 \end{aligned}$$

gde k predstavlja konstantu za čije određivanje je potreban (da bi rešenje bilo jednoznačno) još jedan podatak (na primer pojačanje filtra na nekoj frekvenciji). U z^{-1} ravni FIR filter ne poseduje polove, tj. u z ravni oni su uvek smešteni u koordinatnom početku zbog čega su FIR filteri uvek stabilni.

Faza i grupno kašnjenje FIR filtra su prikazani na slici 1.11.



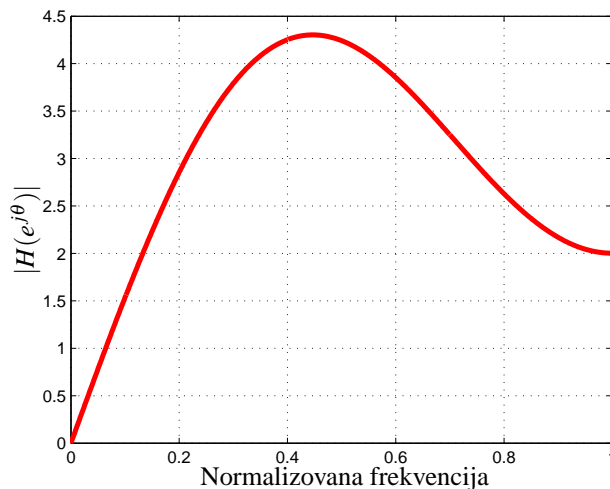
Sl. 1.11: Faza a) i grupno kašnjenje b) FIR filtra trećeg reda.

Da prokomentarišemo amplitudsku karakteristiku

$$\left| H(e^{j\theta}) \right| = 2 \left(\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \tag{1.41}$$

Da bi se dobila suma sinusa u zagradi datog izraza neophodno je da se članovi impulsnog odziva javljaju u parovima sa suprotnim znakom. U ovom slučaju impulsni odziv je bio parne dužine i javila su se dva para koja su pretvorena u dva sinusa. Ovakvo udruživanje nije moguće ako je

impulsni odziv neparne dužine jer centralni (središnji) član ne bi posedovao parnjaka. Međtim ovaj problem neće se javiti ako je impulsni odziv neparne dužine sa centralnim članom jednakim nuli. Amplitudska karakteristika data sa (1.41) prikazana je na slici 1.12.



Sl. 1.12: Amplitudska karakteristika FIR filtra

Kako u zagradi figurišu samo sinusni članovi uvek će pojačanje filtra na nultoj frekvenciji biti jednako nuli, kao na slici 1.12 kada je impulsni odziv antisimetričan. S obzirom da pojačanje mora biti jednako nuli za DC komponentu, sa ovakvim impulsnim odzivom nikako nije moguće realizovati filter propusnik niskih frekvencija kao i filter nepropusnik opsega frekvencija kod kojih je neophodno jedinično pojačanje u koordinatnom početku.

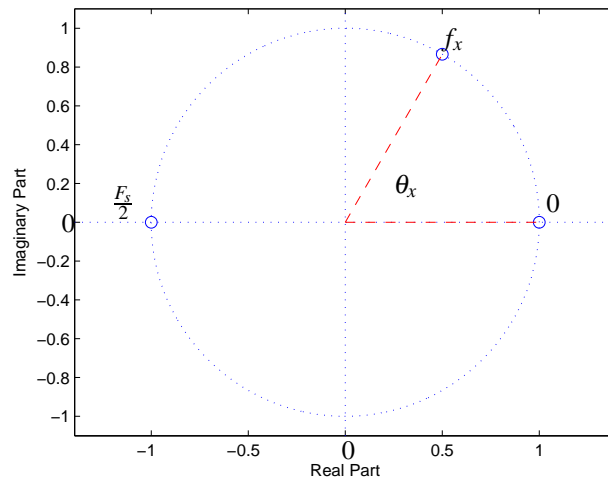
3. Frekvencija odmeravanja iznosi $F_s = 1\text{kHz}$, slabljenje filtra u propusnom opsegu je $a_{max} = 1\text{dB}$ i slabljenje filtra u nepropusnom opsegu $a_{min} = 40\text{dB}$. Napisati programe u MATLAB[®]-u za izračunavanje koeficijenata prenosne funkcije:
- Niskopropusnog filtra (NF), graničnih frekvencija 150Hz i 200Hz;
 - Visokopropusnog filtra (VF), graničnih frekvencija 350Hz i 400Hz;
 - Filtra propusnika opsega (PO), graničnih frekvencija 100Hz, 200Hz, 300Hz i 400Hz (200Hz i 300Hz su granice propusnog opsega a 100Hz i 400Hz granice nepropusnog opsega).

Rešenje: Maksimalna frekvencija koja može da se pojavi u digitalnom sistemu je $F_s/2 = 500\text{ Hz}$ i njoj odgovara digitalna frekvencija $\theta = \pi$. U literaturi se često na frekvencijskoj osi ne nalazi vrednost θ već njena normalizovana vrednost θ/π zbog čega su granične vrednosti na x osi 0 i 1. Na slici 1.13 su prikazane lokazije nulte frekvencije, polovine frekvencije odabiranja $F_s/2$ i proizvoljne frekvencije f_x (Frekvencijska osa se nalazi na jediničnom krugu. Gornja polovina kružnice odgovara pozitivnim a donja polovina negativnim frekvencijama respektivno). Frekvenciji 0 Hz odgovara digitalna frekvencija $\theta = 0$, frekvenciji $F_s/2$ odgovara digitalna frekvencija π dok frekvenciji f_x odgovara digitalna frekvencija θ_x . Vrednost θ_x se lako određuje na osnovu proporcije

$$\frac{F_s}{2} : \pi = f_x : \theta_x$$

odakle dobijamo da je

$$\pi f_x = \theta_x \frac{F_s}{2} \implies \theta_x = \frac{f_x}{\frac{F_s}{2}} \pi \quad (1.42)$$



Sl. 1.13:

U MATLAB[®] -u frekvencije se kao ulazni argumenti unose u normalizovanim vrednostima (dobijaju se deljenjem sa π , tako da frekvenciji $\frac{F_x}{2}$ odgovara normalizovana frekvencija 1 a frekvenciji f_x odgovara normalizovana frekvencija

$$\theta_x = \frac{f_x}{\frac{F_s}{2}} \quad (1.43)$$

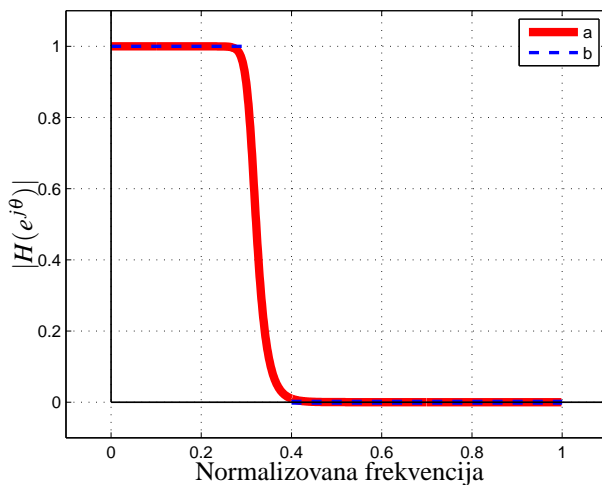
(a) Niskopropusni filter - NF:

```
clear all %brise memoriju
close all %zatvara sve otvorene slike
Fs=1000;% frekvencija odabiranja
fp=150; %granica propusnog opsega
fs=200; % granica nepropusnog opsega
fs2=Fs/2; %polovina frekv. odabiranja
rp=1; %slabljenje u decibelima u propusnom opsegu
rs=40; % dB u nepropusnom opsegu
[n,wn]=buttord(fp/fs2,fs/fs2,rp,rs) %normalizovane frekvencije su
%argumenti naredbe buttord koja odredjuje potrebni red filtra n i
%parametar wn koji su ulaz za naredbu butter koja kao izlaz daje
%koeficijente prenosne funkcije (koef. polinoma)
[b,a]=butter(n,wn) % b i a su polinomi prenosne funkcije
[h,w]=freqz(b,a,1000); % u 1000 tacaka (izmedju 0 i pi) racuna
%karakteristiku filtra h, a u vektor w smesta frekvencijske tacke
figure %otvara sliku
plot(w/pi,abs(h)) % crta amplitudsku karakteristiku koja je moduo
%vektora h pri cemu je na x osi normalizovana frekvencija
```

Argumenti MATLAB[®] naredbi su normalizovane frekvencije a određene su na osnovu izraza (1.43).

Na slici 1.14 je prikazana karakteristika filtra propusnika niskih frekvencija

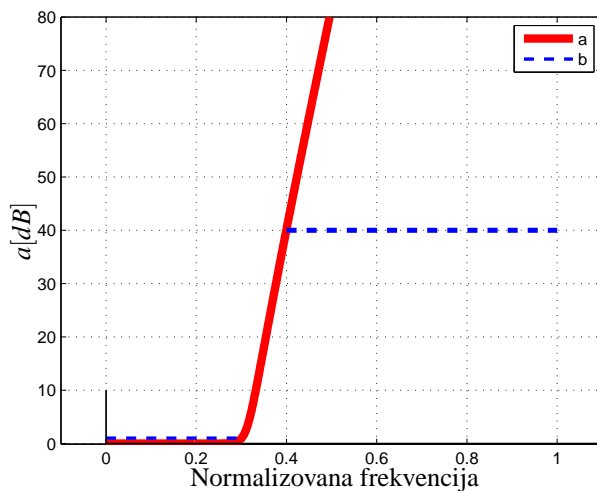
Idealni filter ne može biti realizovan. Što su zahtevi strožiji red filtra će biti viši. Zadato dozvoljeno slabljenje od 1dB je realizovano na opsegu $[0, 0.3] = [0, 150/500]$ (kad je reč o normalizovanim



Sl. 1.14: Amplitudska karakteristika Buterworth-ovog filtra a) i karakteristika idealnog filtra b).

frekvencijama) a minimalno slabljenje od 40 dB je realizovano na opsegu $[0.4, 1] = [200/500, 1]$. Opseg $[0.3, 0.4]$ je poznat kao prelazna zona i tu se karakteristika filtra ne kontroliše i nije bitno kako dobijena karakteristika u tom delu izgleda. Važno je da u propusnoj zoni pojačanje bude dovoljno blisko jedinici (pojačasnje nema jedinicu, tj reč je o neimenovanom broju) a u nepropusnoj zoni dovoljno blisko nuli. Na slici 1.14 je prikazano pojačanje sistema, odnosno amplitudska karakteristika. Uobičajeno da se umesto pojačanja zadaje želejno slabljenje u decibelima po opsezima. Praktično slika 1.14 ima oblik 1.15 kada je na y osi dato slabljenje u decibelima. Veza između pojačanja i slabljenja je data izrazom

$$a[dB] = -20\log_{10}(|H(e^{j\theta})|)$$



Sl. 1.15: Slabljenje Buterworth-ovog filtra a) i zadata granična slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu b).

Dakle slika 1.14 i 1.15 prikazuju istu karakteristiku samo je na y osi odabrana druga jedinica.

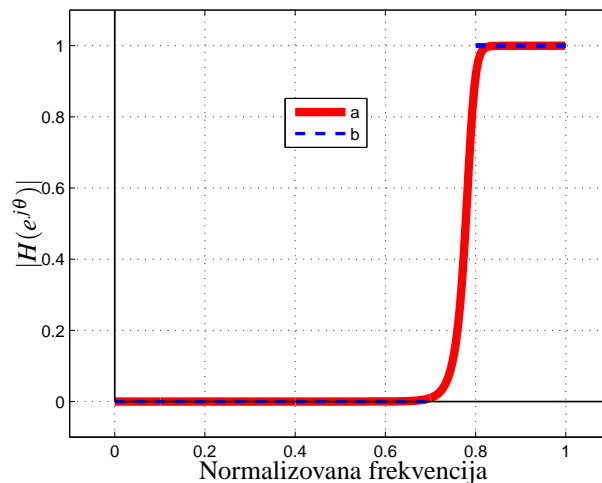
Sa obe slike se uočava da projektovani filter zadovoljava zadate specifikacije. U ovom primeru je izabran Butterworth-ov filter koga karakteriše maksimalno ravna karakteristika, koja je monotona funkcija frekvencije. U konkretnom slučaju je dobijen filter reda $N = 15$. To je minimalna složenost filtra kojom se zadovoljavaju zadate nspecifikacije. Izborom filtra višeg reda se dobijaju bolje specifikacije na uštrb povećane složenosti filtra (viši red polinoma, više koeficijenata, veći broj komponenti kod hardverske realizacije što neminovno vodi višoj ceni. Nama je cilj da za što nižu cenu (niži red polinoma) projektujemo filter koji zadovoljava postavljene specifikacije).

(b) Visokopropusni filter - VF:

Jedina razlika kod projektovanja propusnika visokih frekvencija u odnosu na propusnik niskih frekvencija se ogleda u naredbi `butter` gde se pojavljuje kao poslednji argument naredbe `'high'`, koji ukazuje da se projektuje visokopropusni filter. Uostalom kod projektovanja filtera uvek se problem svodi na projektovanje propusnika niskoh frekvencija (time je vec određen red filtra) a sve ostasle karakteristike (propusnik opsega, propusnik visokih frekvencija ...) se lako dobijaju matematičkim manipulacijama tj. preslikavanjima. Odgovarajući MATLAB[®] kod je dat u nastavku

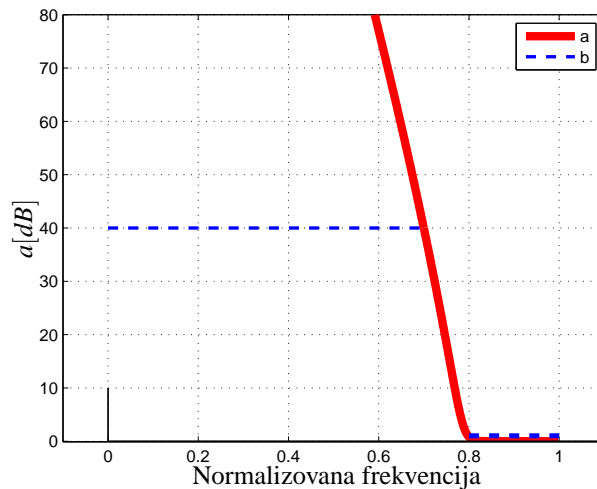
```
clear all
fs=1000;
Fs=350;
fp=400;
fs2=Fs/2;
rp=1;
rs=40;
[n,wn]=buttord(fp/fs2,fs/fs2,rp,rs)
[b,a]=butter(n,wn,'high')
% slede naredbe crtanja koje su izostavljene
```

a amplitudska karakteristika i karakteristika slabljenja su date na slikama 1.16 i 1.17, respektivno.



Sl. 1.16: Amplitudska karakteristika Buterworth-ovog filtra a) i karakteristika idealnog filtra b).

U slučaju filtra propusnika visokih frekvencija granična frekvencija propusnog opsega f_p je viša od granice nepropusnog opsega f_s . Idelani filter bi imao pojačanje jednako nuli (u idealnom slučaju slabljenje od ∞ decibela) na opsegu frekvencija $[0, f_s]$ i jedinično pojačanje (slabljenje od 0 decibela u idealnom slučaju) na opsegu $[f_p, F_s/2]$, izraženo u hercima tj. na opsezima $[0, \theta_s]$ i $[\theta_p, \pi]$,



Sl. 1.17: Slabljenje Butterworth-ovog filtra a) i zadata granična slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu b).

datim u digitalnoj frekvenciji. Sa prikazanih slika vidimo da projektovani filter zadovoljava zadate specifikacije.

(c) Filter propusnik opsega:

Filter propusnik opsega frekvencija ima dve granične frekvencije za propusni opseg i dve za nepropusni opseg. Zato su sada granične frekvencije sme]v stene u vektore $f1$ i $f2$. Projektovanje (nije vidljivo korisniku jer samo poziva gotove funkcije MATLAB[®]-a) se i sada svodi na određivanje najprostijeg filtra propusnika niskih frekvencija (ova oblast se izučava na višim godinama studija) iza čega se preslikavanjem (kada se udvostručava red filtra) dobija traženi filter propusnik opsega frekvencija. U nastavku sledi kod MATLAB[®] programa kojim se određuje prenosna funkcija filtra, s tim da su izostavljene naredbe za crtanje dobijenih karakteristika.

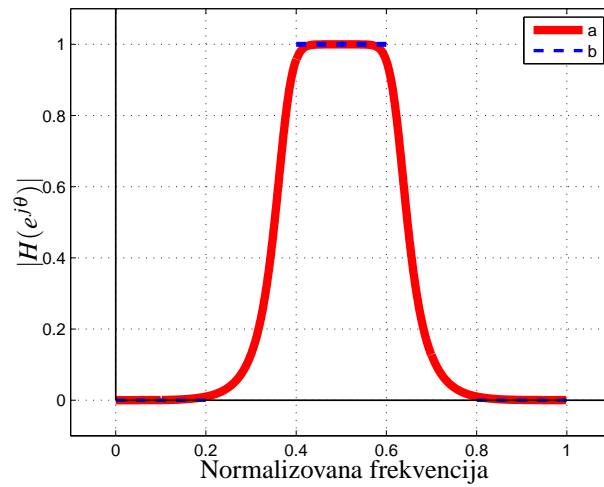
```

Fs=1000;
f1=[200,300];
f2=[100,400];
fs2=Fs/2;
rp=1;
rs=40;
[n,wn]=buttord(f1/fs2,f2/fs2,rp,rs)
[b,a]=butter(n,wn)

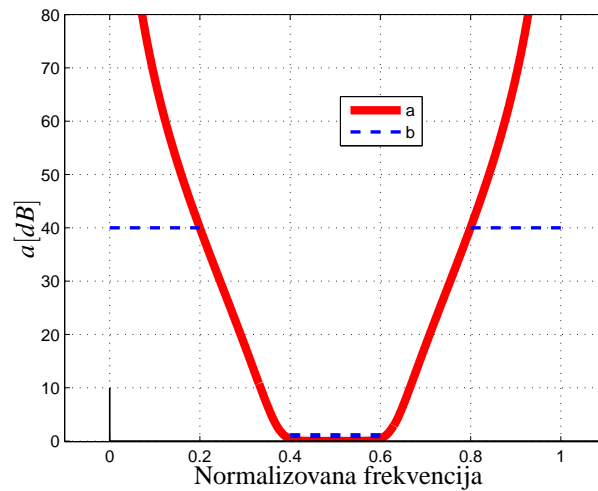
```

Amplitudska karakteristika i odgovarajuća karakteristika slabljenja (potpuno ista karakteristika, predstavljena na dva načina) su prikazane na slikama 1.18 i 1.19.

Kao i u prethodna dva slučaja uočavaju se prelazne zone ([0.2, 0.4] i [0.6, 0.8]) unutar kojih se nema kontrola nad karakteristikom filtra. Ova nemogućnost da se realizuje idealni filter u praksi utiče na izbor frekvencije odabiranja F_s . Tako na primer, u slučaju muzičkog signala koji se pre digitalizacije filtrom propusnikom niskih frekvencija ograničava tako da maksimalna frekvencija koja može da se pojavi u njegovom spektru iznosi 20 kHz, odabiranje se ne izvodi frekvencijom $F_s = 40$ kHz, što je idealni slučaj, već se koristi, zbog pojave prelazne zone, nešto viša frekvencija od $F_s = 44100$ Hz.



Sl. 1.18: Amplitudska karakteristika Buterworth-ovog filtra a) i karakteristika idealnog filtra b).



Sl. 1.19: Slabljenje Buterworth-ovog filtra a) i zadata granična slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu b).

4. (a) Neka je funkcija prenosa diskretne mreže:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z^3 + 5z + 6}{z^2 + 3z + 4}$$

Napisati diferencnu jednačinu za datu mrežu.

- (b) Data je diferencna jednačina diskretne mreže:

$$y[n] = -y[n-2] - 7y[n-1] - 2x[n-2] + 3x[n-1]$$

Napisati izraz za prenosnu funkciju date mreže.

- (c) Rešiti diferencnu jednačinu primenom \mathcal{Z} -Transformacije ako je na ulazu kola prisutan jedinični impuls (Dirakov impuls $\delta[n]$).

$$y[n] = -5y[n-2] + 6y[n-1] - 12x[n-1] + 10x[n]$$

- (a) U prvom koraku brojilac i imenilac prenosne funkcije se dele sa z^2 (sa z stepenovan najvišim stepenom u datom izrazu kako bi novi izraz bio funkcija po promenljivoj z^{-1} koja predstavlja kašnjenje i olakšava u narednom koraku izračunavanje inverzne \mathcal{Z} transformacije)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + 5z + 6}{z^2 + 3z + 4} = \frac{1 + 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 4z^{-2}} \quad (1.44)$$

Unakrsnim množenjem se dobija izraz

$$Y(z) + 3Y(z)z^{-1} + 4Y(z)z^{-2} = X(z) + 5X(z)z^{-1} + 6X(z)z^{-2} \quad (1.45)$$

Izdvajanjem člana $Y(z)$ dobijamo

$$Y(z) = -3Y(z)z^{-1} - 4Y(z)z^{-2} + X(z) + 5X(z)z^{-1} + 6X(z)z^{-2} \quad (1.46)$$

a posle inverzne \mathcal{Z} transformacije se dobija diferencna jednačina koja pokazuje kako najnoviji izlazni odbirak zavisi od tekućeg ulaznog i prethodnih ulaznih i izlaznih odbiraka

$$y[n] = -3y[n-1] - 4y[n-2] + x[n] + 5x[n-1] + 6x[n-2] \quad (1.47)$$

Korišćena je osobina Z transformacije

$$F(z)z^{-k} \leftrightarrow f[n-k]$$

- (b) Krenuvši od diferencne jednačine

$$y[n] = -y[n-2] - 7y[n-1] - 2x[n-2] + 3x[n-1] \quad (1.48)$$

\mathcal{Z} transformacijom se dobija

$$Y(z) = -Y(z)z^{-2} - 7Y(z)z^{-1} - 2X(z)z^{-2} + 3X(z)z^{-1} \quad (1.49)$$

Izvlačenjem ispred zagrada zajedničkih članova se dobija

$$Y(z) [1 + 7z^{-1} + z^{-2}] = X(z) [3z^{-1} - 2z^{-2}] \quad (1.50)$$

što sređivanjem daje prenosnu funkciju sistema

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^{-1} - 2z^{-2}}{1 + 7z^{-1} + z^{-2}} = \frac{3z - 2}{z^2 + 7z + 1} \quad (1.51)$$

- (c) Krenuvši od diferencne jednačine koja opisuje sistem u vremenskom domenu (analogno diferencijalnim jednačinama u slučaju analognih sistema)

$$y[n] = -5y[n-2] + 6y[n-1] - 12x[n-1] + 10x[n] \quad (1.52)$$

\mathcal{Z} transformacijom se dobija

$$Y(z) = -5Y(z)z^{-2} + 6Y(z)z^{-1} - 12X(z)z^{-1} + 10X(z) \quad (1.53)$$

opis sistema u frekvencijskom domenu.

$$Y(z) [1 + 5z^{-2} - 6z^{-1}] = X(z) [10 - 12z^{-1}] \quad (1.54)$$

odnosno prenosna funkcija datog sistema

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{10 - 12z^{-1}}{1 + 5z^{-2} - 6z^{-1}} = \frac{10 - 12z^{-1}}{1 - 6z^{-1} + 5z^{-2}} \quad (1.55)$$

\mathcal{Z} transformacija Dirakovog impulsa ima vrednost $\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1$ (a on je u ovom slučaju ulazni signal $x[n]$). Na osnovu izraza (1.55) se dobija da je

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \cdot 1 = H(z)$$

Signal $y[n]$ biće određen inverznom \mathcal{Z} transformacijom za šta je neophodno odrediti polove izraza (1.55) (razvojem u parcijalne razlomke)

$$\begin{aligned} 5z^{-2} - 6z^{-1} + 1 &= 0 \\ z_{1,2}^{-1} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} \\ z_1^{-1} &= 1 \quad z_2^{-1} = 1/5 \end{aligned}$$

Dakle reč je o dva prosta realna pola.

$$Y(z) = \frac{10 - 12z^{-1}}{5(z^{-1} - 1)(z^{-1} - \frac{1}{5})} = \frac{10 - 12z^{-1}}{(z^{-1} - 1)(5z^{-1} - 1)} = \frac{A}{z^{-1} - 1} + \frac{B}{5z^{-1} - 1}$$

Pristupamo određivanju ostataka u polovima

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 1} \frac{10 - 12z^{-1}}{5z^{-1} - 1} = \frac{10 - 12}{4} = -\frac{1}{2} \\ B &= \lim_{z^{-1} \rightarrow 1/5} \frac{10 - 12z^{-1}}{z^{-1} - 1} = \frac{10 - \frac{12}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{50 - 12}{-4} = -\frac{19}{2} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Dakle \mathcal{Z} transformacija signala y ima vrednost

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}}{z^{-1} - 1} + \frac{-\frac{19}{2}}{5z^{-1} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - z^{-1}} + \frac{\frac{19}{2}}{1 - 5z^{-1}}$$

koja je napisana u pogodnom obliku da se korišćenjem tablice \mathcal{Z} transformacije lako određuje (praktično inverznom \mathcal{Z} transformacijom) vremenski predstavnik, tj. $y[n]$ kao

$$y[n] = h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \frac{1}{2}u_0[n] + \frac{19}{2}5^n, \text{ za } n \geq 0 \quad (1.57)$$

Polovi u izrazu (1.56) su određeni u z^{-1} ravni a ne u z ravni tako da je pol $z_2 = 5$ i nalazi se van jediničnog kruga. Sistem sa ovakvim polom nije stabilan (potrebno je da svi polovi budu unutar jediničnog kruga). To se vidi i na osnovu impulsnog odziva (na ulazu je Dirakov impuls) koji nije apsolutno sumabilan jer član 5^n nekontrolisano raste vremenom.

Literatura