

UNIVERZITET U NIŠU  
ELEKTRONSKI FAKULTET

---

# SIGNALI I SISTEMI

---

*Zbirka zadataka*

NIŠ, 2014.



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Furijev red, spektar</b>	<b>5</b>
	<b>Literatura</b>	<b>15</b>
	<b>Indeks pojmova</b>	<b>15</b>



# 1

## Furijeov red, spektar

**Zadatak 1.** Izračunati koeficijente Furijeovog reda i nacrtati amplitudski i fazni spektar periodičnog signala  $g(t)$ , osnovne periode  $T = 12s$ , datog izrazom

$$g(t) = \begin{cases} 8 & \text{za } 0 < t < 6s \\ 0 & \text{za } 6s < t < 12s. \end{cases} \quad (1.1)$$

*Rešenje:*

Frekvencija signala je  $f_0 = 1/T = 1/12 = 0.08333Hz$ , odnosno kružna učestanost ima vrednost  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T = \pi/6 = 0.524rad/s$ .

Periodični signali mogu biti predstavljeni Furijeovim redom

$$g_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 t} \quad (1.2)$$

čije koeficijente određujemo na osnovu izraza

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} T/2 g(t) dt, \quad \text{zak} = 0 \quad (1.3)$$

i

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} T/2 g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \text{zak} = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

U konkretnom slučaju se koeficijent  $C_0$  izračunava kao

$$C_0 = \frac{1}{12} \int_0^{12} g(t) dt = \frac{1}{12} \left[ \int_0^6 8 dt + \int_6^{12} 0 dt \right] = \frac{1}{12} 8t \Big|_0^6 = \frac{8(6-0)}{12} = 4 = 4e^{j0} \quad (1.5)$$

i odgovara srednjoj vrednosti signala  $g(t)$  (DC komponenta (na frekvenciji  $f = 0$ )).

Koeficijente  $C_k, k = 1, 2, \dots$  izračunavamo iz izraza

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{12} \int_0^{12} g(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{12} \int_0^6 8e^{-jk\pi t/6} dt \\
&= \frac{2}{3} \int_0^6 e^{-jk\pi t/6} dt = \frac{2 \cdot 6}{-3jk\pi} e^{-jk\pi t/6} \Big|_0^6 = \frac{4j}{-j^2 k\pi} [e^{-jk\pi 6/6} - e^{-jk\pi 0/6}] \\
&= \frac{4j}{k\pi} [e^{-jk\pi} - 1], \quad k = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Na osnovu izraza (1.6) zaključujemo da je

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{za } k = 2m \text{ (} k \text{ parno)} \\ \frac{-8j}{k\pi} & \text{za } k = 2m + 1 \text{ (} k \text{ neparno).} \end{cases} \tag{1.7}$$

s obzirom da je  $e^{-j(2m)\pi} = 1$  a  $e^{-j(2m+1)\pi} = -1$ . Na osnovu ovog izraza se dobija da je

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0 - 2.5465j = 2.5465e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
C_2 &= 0 + j0 = 0e^{j0} \\
C_3 &= 0 - 0.8488j = 0.8488e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
C_4 &= 0 + j0 = 0e^{j0} \\
C_5 &= 0 - 0.5093j = 0.5093e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.8}$$

a

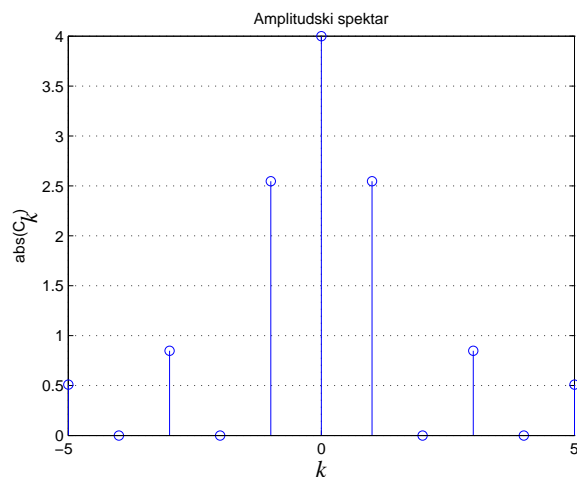
$$\begin{aligned}
C_{-1} &= C_{-1}^* = 0 + 2.5465j = 2.5465e^{j\frac{\pi}{2}} \\
C_{-2} &= C_{-2}^* = 0 + j0 = 0e^{j0} \\
C_{-3} &= C_{-3}^* = 0 + 0.8488j = 0.8488e^{j\frac{\pi}{2}} \\
C_{-4} &= C_{-4}^* = 0 + j0 = 0e^{j0} \\
C_{-5} &= C_{-5}^* = 0 + 0.5093j = 0.5093e^{j\frac{\pi}{2}} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.9}$$

gde je sa  $C^*$  obeležena konjugovano kompleksna vrednost konstante  $C$ .

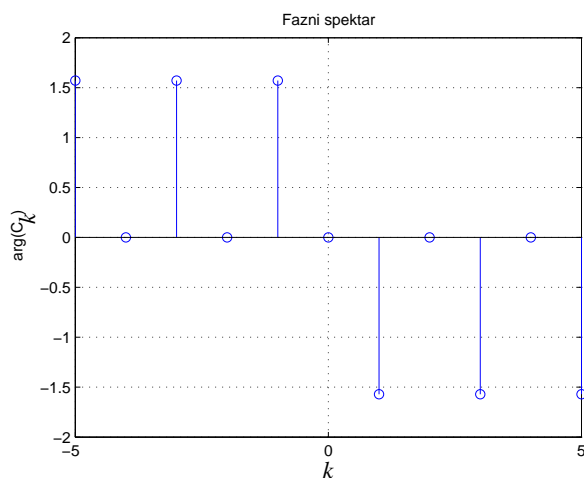
Amplitudski spektar signala datog izrazom (1.1) je prikazan na slici 1.1.

Fazni spektar ovog signala prikazan je na slici 1.2.

Jednakost periodične kontinualne funkcije i njenog Furijeovog reda beskonačne dužine postoji samo u slučaju neprekidnih funkcija. Data funkcija  $g(t)$  je sa prekidima u trenucima  $t = \dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots$ , kada skokovito menja vrednost sa 8 na 0 i obrnuto, što za posledicu daje Gibsov fenomen (otkriven od strane Henry Wilbraham-a prvi put godine 1848. a potom i od strane Willard Gibbs-a 1899. godine po kome nosi naziv). Furijeov red (funkcija dobijena sumiranjem jednosmerne komponente i harmonika) poseduje oscilatornu prirodu sa maksimumom u okolini prekida funkcije  $g(t)$ , koji se ne može ukinuti a koji konvergira nekoj konačnoj vrednosti kada dužina reda neograničeno raste ( $k \rightarrow \infty$ ). Praktično Furijeov red konačne dužine aproksimira periodičnu funkciju  $g(t)$ , što je za slučaj  $N = 5$  prikazano na slici 1.3, tj.



Sl. 1.1: Amplitudski spektar pravougaonog signala datog izrazom (1.1).



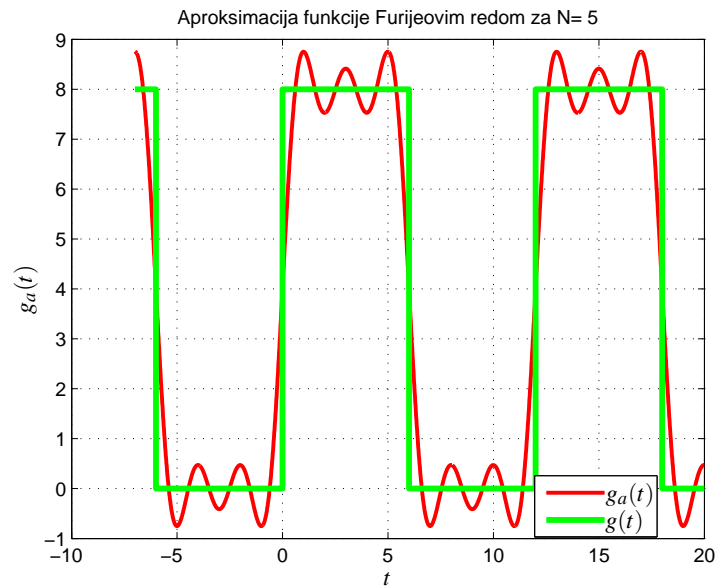
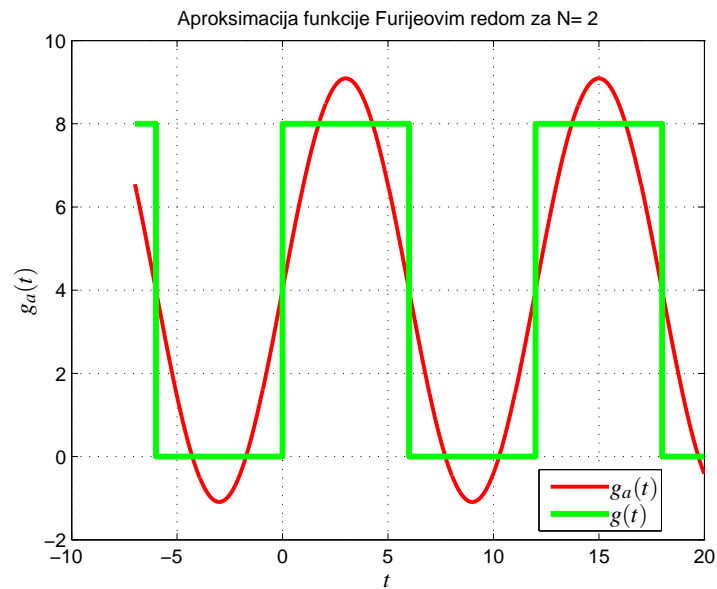
Sl. 1.2: Fazni spektar pravougaonog signala datog izrazom (1.1).

$$g_a(t) = \sum_{k=-5}^5 C_k e^{jk\frac{\pi}{6}t} \quad (1.10)$$

Furijev red dužine  $N = 2$  je prikazan na slici 1.4.

Sa slika 1.5 i 1.7 primećujemo da funkcija  $g_a(t)$  poseduje maksimum u okolini tačke prekida funkcije  $g(t)$  čija je vrednost veća od 8.5.

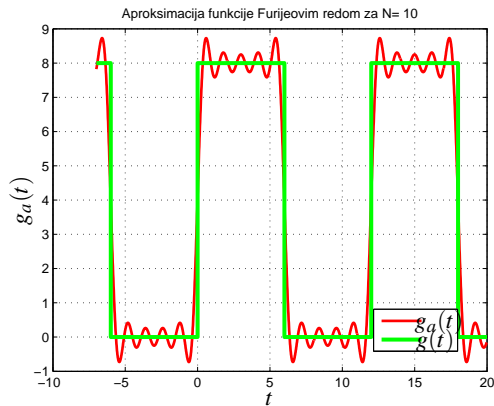
Treba obratiti pažnju da je na slici 1.5 na  $x$  osi vreme u sekundama a na slici 1.6 na  $x$  osi je indeks  $k$  (redni broj koeficijenata Furijevog reda  $C_k$  čije se vrednosti modula mogu očitati sa  $y$  ose). S obzirom da  $C_k$  ukazuje na amplitudu kompleksne prostoperiodične funkcije frekvencije  $kw_0$ , moguće je na  $x$  osi za označavanje umesto rednog broja koristiti frekvenciju harmonika. Praktično sve vrednosti na  $x$  osi treba samo pomnožiti sa  $w_0$  čime se dobijaju vrednosti u  $rad/s$  ili pomnožiti sa  $f_0 = 1/T$  posle čega bi vrednosti na  $x$  osi bile u  $Hz$ .

Sl. 1.3: Periodična funkcija  $g(t)$  i njen Furijeov red  $g_a(t)$  dužine  $N = 5$ .Sl. 1.4: Periodična funkcija  $g(t)$  i njen Furijeov red  $g_a(t)$  dužine  $N = 2$ .

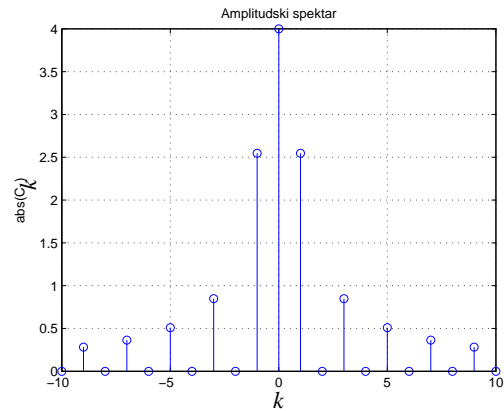
Za određivanje koeficijenata Furijeovog reda je iskorišćen MATLAB<sup>®</sup> program, u kome je potrebno na samom početku promeniti izraz za izračunavanje koeficijenta  $C_0$  (označenog sa  $c0$  u programu) i izraz kojim se izračunavaju koeficijenti  $C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  (označeni sa  $cc$  u programu), a čiji je kod priložen u nastavku, kako bi se mogao iskoristiti za proizvoljnu funkciju  $g(t)$ .

```
clear all
close all
```

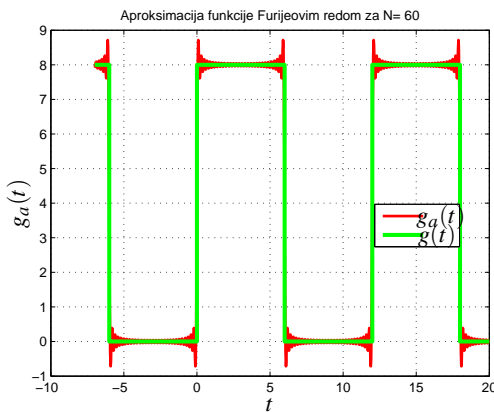




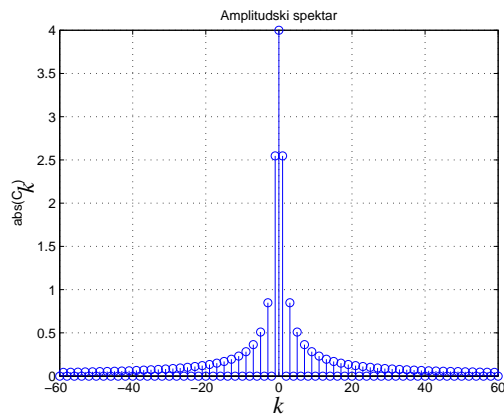
Sl. 1.5: Periodična funkcija  $g(t)$  i njen Furijeov red  $g_a(t)$  dužine  $N = 2$ .



Sl. 1.6: Amplitudski spektar za  $N = 10$ .



Sl. 1.7: Periodična funkcija  $g(t)$  i njen Furijeov red  $g_a(t)$  dužine  $N = 60$ .



Sl. 1.8: Amplitudski spektar za  $N = 60$ .

```

syms t
T=12 % perioda 12 sekundi
c0=(1/T)*int(8,t,0,6) % jednosmerna (DC) komponenta
N=2 % broj koeficijenata koji odredjujemo (ne
% racunajuci DC komponentu)- broj harmonika
n=1:N;
cc=(1/T)*int(8*exp(-j*n*2*pi*t/T),t,0,6) % izracunava koeficijente
k=[c0 cc];% formira niz koeficijenata (C0, C1, ..., CN)
k=double(k); % prelazi iz simbolike u realne vrednosti
koef=[conj(fliplr(k(2:length(k)))) k]; % dodaje koeficijente sa
% negativnim indeksom koji su konjugovane vrednosti
figure
stem([-N:N],abs(koef)) % amplitudski spektar
xlabel('n')
ylabel('abs(C_n)')
title('Amplitudski spektar')

```

```

grid
figure
stem([-N:N],angle(koef))
xlabel('n')
ylabel(' arg(C_n)')
title('Fazni spektar')
grid
tt=0:0.01:20; % vremenska osa za sliku
tt=tt';
nn=-N:N;
pom=tt*nn;
pom=pom';
w0=2*pi/T; % ugaona ucestanost prvog harmonika
ff=koef*exp(j*w0*pom);
%ff=k(1)+k(2)*exp(j*2*pi*tt/T)+conj(k(2))*exp(-j*2*pi*tt/T)+k(4)*exp(3*j*2*pi*tt/T)
figure
plot(tt,ff,'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('f_a(t)')
aaa=num2str(N);
title(['Aproksimacija funkcije Furijeovim redom za
N= ',aaa])
grid

```

**Zadatak 2.** Izračunati koeficijente Furijeovog reda i nacrtati amplitudski i fazni spektar periodičnog signala  $g(t)$ , osnovne periode  $T = 12s$ , datog izrazom

$$g_2(t) = \begin{cases} 4 & \text{za } 0 < t < 6s \\ -4 & \text{za } 6s < t < 12s. \end{cases} \quad (1.11)$$

*Rešenje:* Zbog simetrije signala u odnosu na  $t$  osu, i identičnog trajnja dela signala kada je njegova vrednost jednaka 4 i dela signala kada mu je vrednost -4, srednja vrednost signala jednaka je nuli tj.  $C_0 = 0$ . Važi da je  $g_2(t) = g(t) - 4$  ( $g(t)$  je funkcija iz zadatka 1.). Zbog toga se spektar signala razlikuje po pitanju DC komponente a svi ostali harmonici imaju istu amplitudu kao u prethodnom zadatku, što se može uočiti sa slike 1.10.

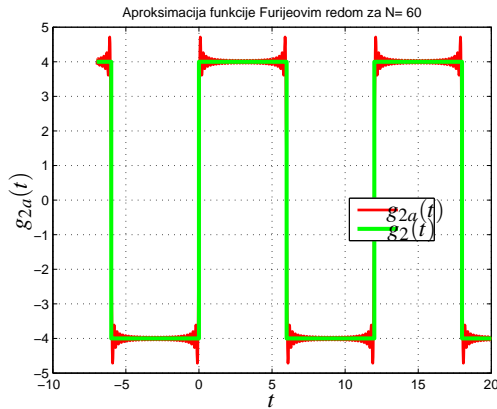
Kompleksni Furijeov red

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1.12)$$

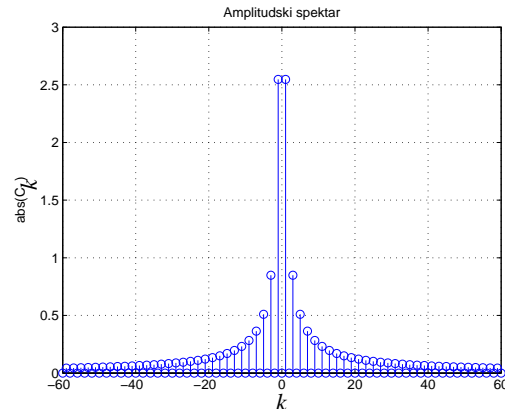
može biti dat i preko realnih koeficijenata

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (1.13)$$

čime je praktično predstavljen preko svog parnog i neparnog dela, s obzirom da je kosinus parna a sinus neparna funkcija. Data funkcija  $g_2(t)$  je neparna (simetrična u odnosu na koordinatni početak),



Sl. 1.9: Periodična funkcija  $g_2(t)$  i njen Furijeov red  $g_{2a}(t)$  dužine  $N = 60$ .



Sl. 1.10: Amplitudski spektar za  $N = 60$ .

tako da u izrazu 1.13 nedostaju kosinusni članovi, odnosno  $a_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  su jednaki nuli. S obziroma da je

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

u izrazu 1.12 koeficijenti  $C_k$  biće čisto imaginarni brojevi, kako je pokazano izrazom 1.9. Dakle ako je data funkcija parna (simetrična u odnosu na y osu) Furijeov red (1.13) sadrži samo kosinusne članove, odnosno koeficijenti  $C_k$  iz izraza (1.12) su čisto realni brojevi a ako je data funkcija neparna, postoje samo sinusni članovi Furijeovog reda zbog čega su koeficijenti  $C_k$  čisto imaginarni brojevi. Neke funkcije nisu ni parne ni neparne. Takve funkcije poseduju komponente i kosinusnog i sinusnog reda a koeficijenti  $C_k$  su kompleksni brojevi (imaju i realni i imaginarni deo). Osim ove dve moguće simetrije funkcija može posedovati i polutalasnu simetriju, definisanu sa

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (1.14)$$

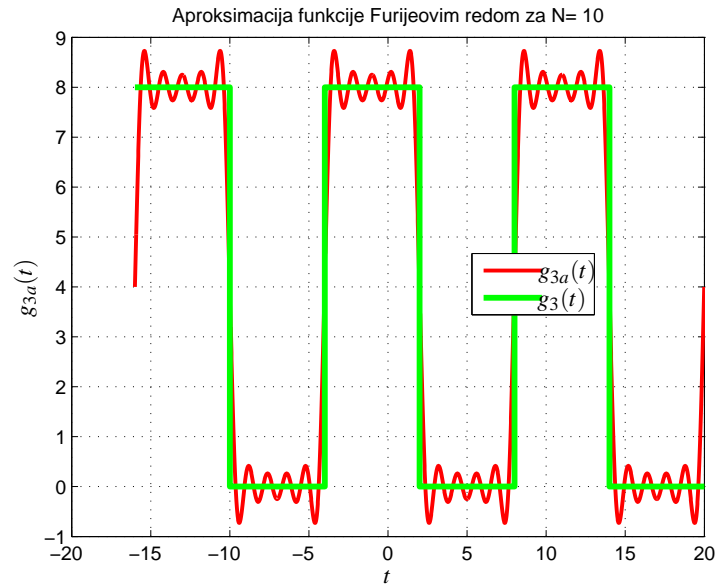
Ovakve funkcije poseduju samo neparne harmonike odnosno za njih važi da je

$$\begin{aligned} C_k &\neq 0, & \text{za} & \quad k = 2m + 1 \\ C_k &= 0, & \text{za} & \quad k = 2m \end{aligned} \quad (1.15)$$

S obzirom da funkcija  $g_2(t)$  poseduje polutalasnu simetriju svi parni harmonici su jednaki nuli kako se uočava sa slike 1.10. Treba naglasiti da funkcija može biti ni parna ni neparna, kada su koeficijenti  $C_k$  kompleksni brojevi, ali da istovremeno poseduje polutalasnu simetriju zbog čega su svi parni harmonici jednaki nuli.

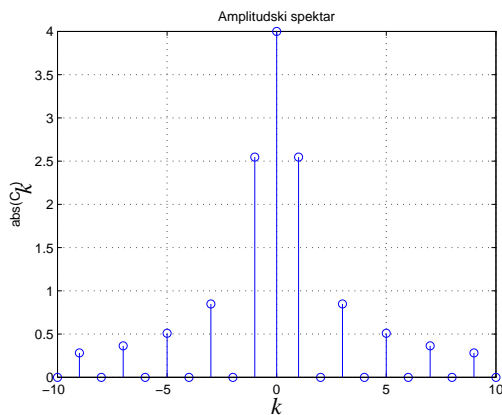
Na primer, uvođenjem vremenskog pomeraja od  $T_{pom} = 2s$ , od funkcije  $g(t)$  dobijamo funkciju  $g_3(t) = g(t - T_{pom})$  koja je prikazana na slici 1.11.

Na istoj slici prikazana je funkcija  $g_{3a}(t)$  dobijena skraćivanjem Furijeovog reda na 11 članova (DC komponenta-  $C_0$  i prvih 10 harmonika). Kako je oblik funkcije identičan funkciji  $g(t)$  (sastoji se od dela trajanja  $6s$  amplitude 8 i dela trajanja  $6s$  amplitude 0, kao i  $g(t)$ ) obe funkcije poseduju identičan amplitudski spektar, što je prikazano na slici 1.12. Razlika između funkcija  $g_2(t)$  i  $g_3(t)$

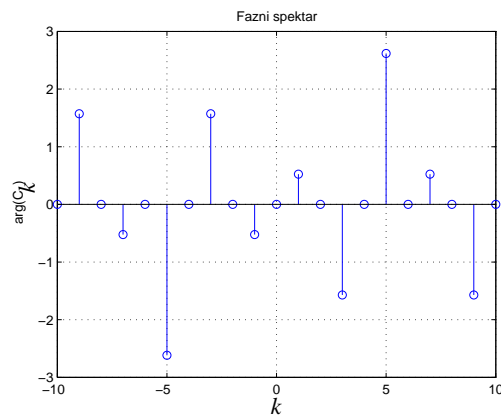


Sl. 1.11: Periodična funkcija  $g_3(t)$ , periode  $T = 12s$  dobijena vremenskim pomeranjem funkcije  $g(t)$ .

postoji i ona je uočljiva sa slike 1.13 jer je neophodno promeniti početne faze stavove kosinusnih i sinusnih funkcija kako bi se pojavilo vremensko kašnjenje od  $2s$ .



Sl. 1.12: Amplitudski spektar funkcije  $g_3(t)$  za  $N = 10$ .



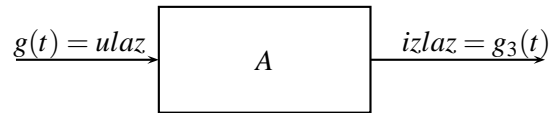
Sl. 1.13: Fazni spektar za  $N = 10$ .

Da pojasnimo kako do kašnjenja dolazi. Na slici 1.14 je prikazano idealno kolo za kašnjenje signala.

Praktično je reč o pojačavaču čije poćanje ne zavisi od frekvencije, odnosno pojaćanje ima vrednost

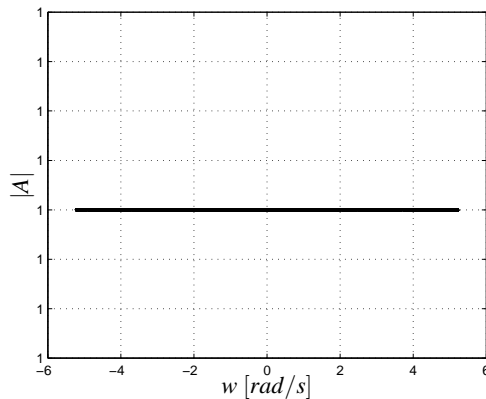
$$A = 1 \cdot e^{-j\omega t} = e^{-j\omega t} = |A|e^{j \cdot \arg(A)}. \quad (1.16)$$

Na slici 1.15 je prikazana amplitudska karakteristika pojaćavaća. Kao što vidimo, pojaćanje ne

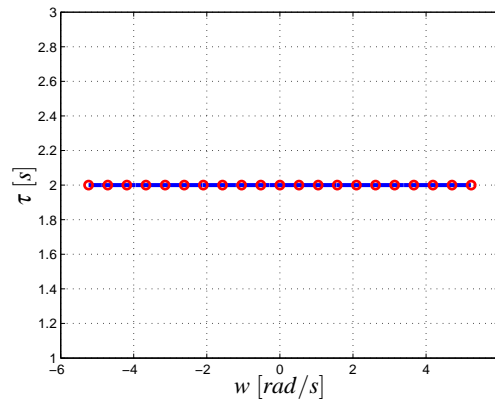


Sl. 1.14:

zavisi od frekvencije i uvek ima jediničnu vrednost (za  $|A| < 1$  i  $|A| > 1$  se očuvava oblik signala, s tim da amplituda signala opada, odnosno raste).



Sl. 1.15: Amplitudska karakteristika idealnog pojačavača.



Sl. 1.16: Grupno kašnjenje idealnog pojačavača.

Na slici 1.17 je prikazana fazna karakteristika idealnog pojačavača. Faza se dobija kao  $\arctan \frac{\text{Imag}(A)}{\text{Real}(A)}$  i sva rešenja su u opsegu  $(-\pi, \pi)$ . Razmotavanjem faze, koje se u MATLAB® -u realizuje naredbom `unwrap`, eliminišu se skokovi vrednosti  $2\pi$ , posle čega se dobija kontinualna fazna funkcija prikazana na slici 1.18.

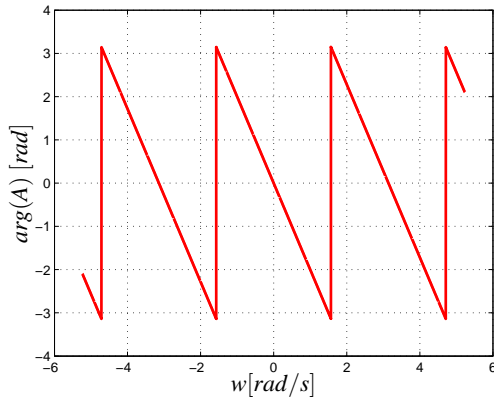
Izvod faze po frekvenciji predstavlja grupno kašnjenje

$$\tau(w) = -\frac{d\{\arg(A)\}}{dw} = -(-m) = m \quad (1.17)$$

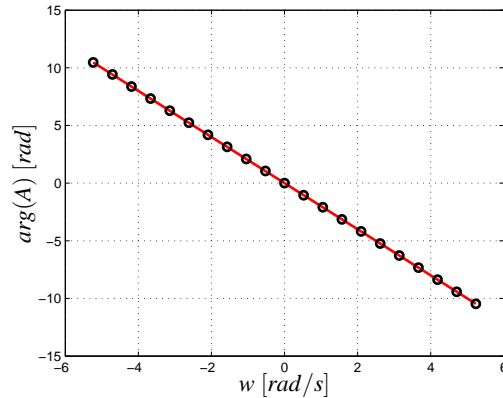
koje se meri u sekundama. Grupno kašnjenje u opštem slučaju je funkcija frekvencije i ukazuje na to za koliko sekundi na izlazu pojačavača zakasni signal frekvencije  $w$  u odnosu na ulazni signal iste frekvencije. Na slici 1.16 je prikazano grupno kašnjenje za  $m = 2$ . Prethodno navedene fazne karakteristike takođe odgovaraju slučaju  $m = 2$ .

Karakteristika grupnog kašnjenja je kontinualna funkcija a u konkretnom slučaju treba primetiti da je ulazni signal prikazan preko Furijeovog reda takav da ako ga sagledamo kao sumu prostoperiodičnih funkcija, prisutan samo na frekvencijama  $0, w_0, 2w_0, \dots$ , pa nam je samo na tim frekvencijama od interesa kakva je vrednost grupnog kašnjenja. Ove karakteristične vrednosti od interesa su na slici 1.16 označene kružićima. Kao što vidimo, sve komponente Furijeovog reda koje odgovaraju ulaznom signalu biće zakašnjenje za tačno 2 sekunde.

Izlaz pojačavača se dobija množenjem ulaznog signala i pojačanja, tj.



Sl. 1.17: "Nerazmotana" fazna karakteristika idealnog pojačavača.



Sl. 1.18: "Razmotana" fazna karakteristika idealnog pojačavača.

$$\begin{aligned}
 g_3(t) &= g(t) \cdot A = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \right] \cdot [1 \cdot e^{-j\omega_0 t}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (C_k \cdot 1) e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega_0 t} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0(t-m)} = g(t-m)
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

odakle vidimo da je izlazni signal zakašnjen verzija ulaznog signala za  $m$  sekundi. Dakle, da bi izlazni signal bio neizobličen (da se očuva njegov oblik) potrebno je da pojačanje bude konstantno na svim frekvencijama (jediničnim pojačanjem se očuvava i amplituda signala) a fazna karakteristika linearno zavisna od frekvencije. Ova je osobina od ključne važnosti u nekim oblastima praktične primene obrade signala, kao što je prenos signala (komunikacija između dve tačke) gde je neophodno bez greške ustanoviti na prijemnoj strani kakav je signal bio na predajnoj strani.

Dakle, sa slike 1.2 vidimo da ulazne komponente imaju fazu jednaku  $-\pi/2$  za  $\omega = (2k+1)\omega_0$  i fazu jednaku nuli za  $\omega = 2k\omega_0$ . Prolaskom signala  $g(t)$ , datog jednačinom 1.1, kroz pojačavač, menja se fazni stav svih harmonika prisutnih u Furijeovom redu koji odgovara ovom signalu, a vrednosti za koliko se faza menja na kojoj frekvenciji se mogu očitati sa grafika 1.18 i na frekvencijama  $k\omega_0$  su one obeležene kružićima. Kako je faza data izrazom

$$\varphi(\omega) = \arg(A) = -2\omega$$

zaključujemo da su njene vrednosti na frekvencijama  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, 5\omega_0, 6\omega_0, 7\omega_0, 8\omega_0, 9\omega_0$  i  $10\omega_0$  jednake  $-1.0472, -2.0944, -3.1416, -4.1888, -5.2360, -6.2832, -7.3304, -8.3776, -9.4248,$  i  $-10.4720$ , respektivno. Zato je faza signala frekvencije  $\omega_0$  na izlazu pojačavača jednaka  $-\pi/2 - 2\omega_0 = -\pi/2 - 1.0472 = -2.6180$  ( $-\pi/2$  je faza ulaznog signala na frekvenciji  $\omega_0$  kojoj dodajemo uticaj pojačavača na toj frekvenciji). Na frekvenciji  $2\omega_0$  faza na izlazu ima vrednost  $0 - 2(2\omega_0) = -2.0944$  (drugi harmonik ulaznog signala ne postoji i faza mu je jednaka nuli). Slično na frekvenciji  $3\omega_0$  faza na izlazu ima vrednost  $-\pi/2 - 2(3\omega_0) = -\pi/2 - 3.1416 = -4.7124$ . Na frekvenciji  $4\omega_0$  faza izlaznog signala je  $0 - 2(4\omega_0) = -4.1888$ . Istim postupkom se na frekvencijama od  $5\omega_0$  do  $10\omega_0$  dobijaju vrednosti faze  $-6.8068, -6.2832, -8.9012, -8.3776, -10.9956$  i  $-10.4720$ .

# Literatura

# Indeks pojmov

Gibsov fenomen, [7](#)