Univerzitet u Nišu
Elektronski fakultet

Goran Stančić

SIGNALI I SISTEMI

Zbirka zadataka

Niš, 2014.

Sadržaj

1

Konvolucija

Zadatak 1. Odrediti konvoluciju signala

$$x_1(t) = \begin{cases} t/3 & \text{za} & 0 < t < 15 \\ 5 & \text{za} & 15 < t < 60 \\ 0 & \text{za} & t > 60 \end{cases}$$

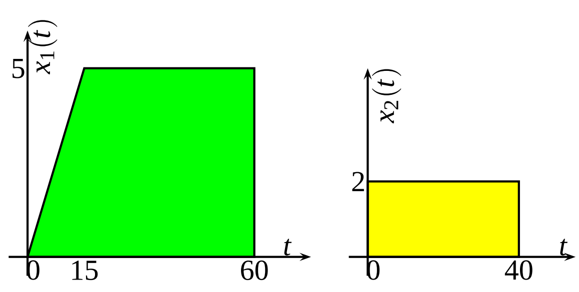
i signala

$$x_2(t) = \begin{cases} 2 & \text{za} & 0 < t < 40 \\ 0 & \text{za} & t > 40 \end{cases}$$

Rešenje: Po definiciji konvolucija se izračunava na osnovu izraza

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) x_1(t-\tau) d\tau \tag{1.1}$$

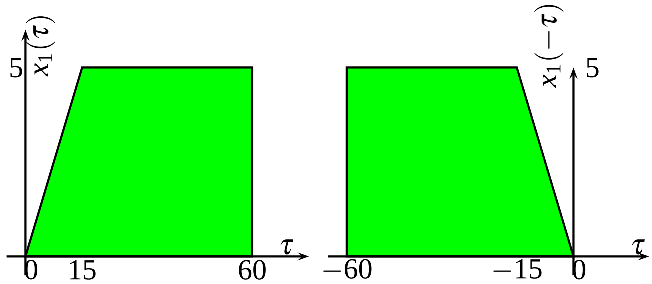
Signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ su prikazani na slici 1.1.



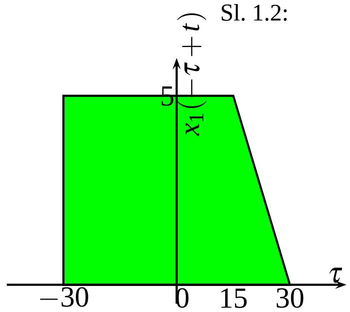
Sl. 1.1:

Da bi lakše razumeli izračunavanje konvolucionog integrala na slici 1.2 su prikazani signali $x_1(\tau)$ i $x1(-\tau)$.

Vremenski pomeren signal, za vreme t, u oznaci $x_1(t-\tau) = x_1(-\tau+t) = x_1(-(\tau-t))$ prikazan je na slici 1.3.



Sl. 1.2:

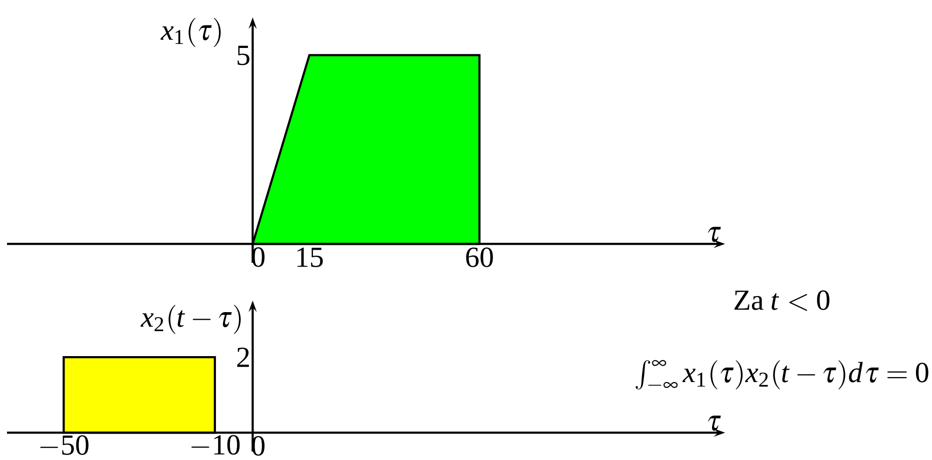


Sl. 1.3:

Treba obratiti pažnju da je vremenska osa obeležena sa τ i da je sa t predstavljena konstantna vrednost za koju se vremenski pomera signal $x_1(\tau)$ (slici 1.3 odgovara vrednost $t = 30$).

Posmatrajući izraz 1.1, u kome su granice integraljenja od $-\infty$ do ∞, zaključujemo da, s obzirom na činjenicu da su date funkcije $x_1(t)$ i $x_2(t)$ nenultih vrednosti na konačnom vremenskom intervalu, integral praktično treba izračunavati samo za one vrednosti τ za koje su istovremeno različite od nule funkcije $x_1(\tau)$ i $x_2(t-\tau)$ (koristićemo definicioni izraz $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$, (1.1).

Na osnovu ovoga zaključujemo da je za $t < 0$ vrednost konvolucije $x_1(t) * x_2(t)$ jednaka nuli, jer za vrednosti τ za koje je funkcija $x_1(\tau)$ različita od nule, funkcija $x_2(t-\tau)$ je jednaka nuli, i obrnuto, tako da je za sve vrednosti τ na celom opsegu od $-\infty$ do ∞ podintegralna funkcija jednaka nuli. Ovo je ilustrovano slikom 1.4 koja je data za slučaj $t = -10$.

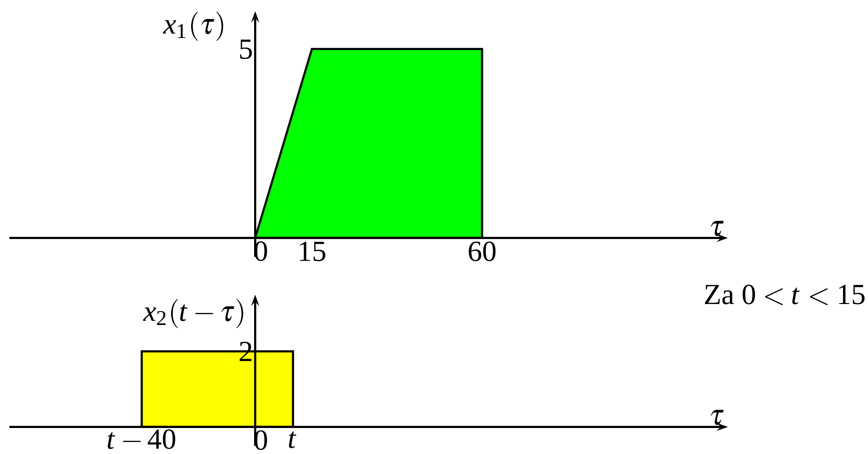


Sl. 1.4:

Slika 1.4 je data za slučaj $t = -10$. Ako funkciju $x_1(t)$ uzmemo kao referentnu, izraz za konvoluciju postaje (za $t < 0$)

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{60} x_1(\tau)\cdot 0 d\tau = 0 \tag{1.2}$$

Tek za $t > 0$ dolazi do preklapanja $x_1(\tau)$ i $x_2(t-\tau)$ pa podintegralna funkcija (proizvod ove dve funkcije) ima nenultu vrednost. U prvom koraku izračunaćemo vrednost konvolucije za $0 < t < 15$. Slika 1.5,koja ilustruje ovaj slučaj, je data za $t = 10$.



Sl. 1.5:

Za $0 < t < 15$, na osnovu slike 1.5, konvoluciju izračanavamo na osnovu izraza

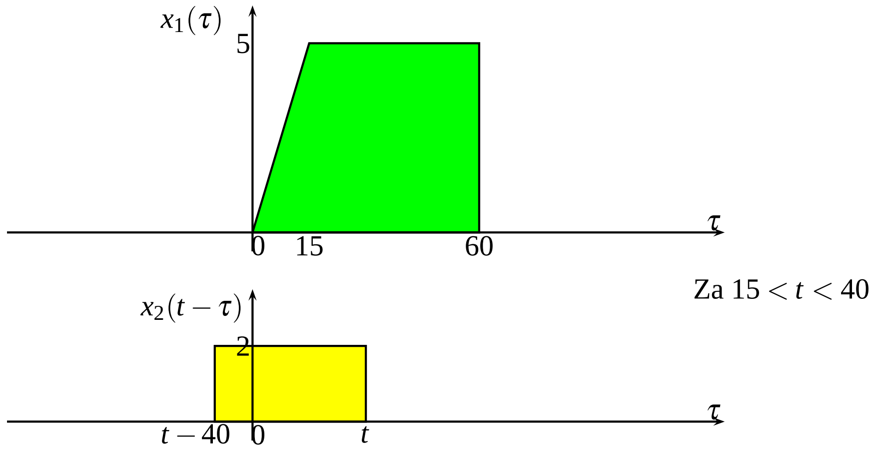
$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \frac{\tau}{3}2d\tau = \frac{\tau^2}{2}\frac{2}{3}|_0^t = \frac{t^2}{3} \tag{1.3}$$

Za $t = 15$ se dobija 75 za vrednost konvolucije. Za $t > 15$ funkcija $x_2(t-\tau)$ u potpunosti prekriva linearnu oblast funkcije $x_1(\tau)$ i delimično oblast u kojoj je njena vrednost jednaka 5. To znači da se pri izračunavanju konvolucije definicioni integral deli na dva integrala. To se dobro uočava sa slike 1.6.

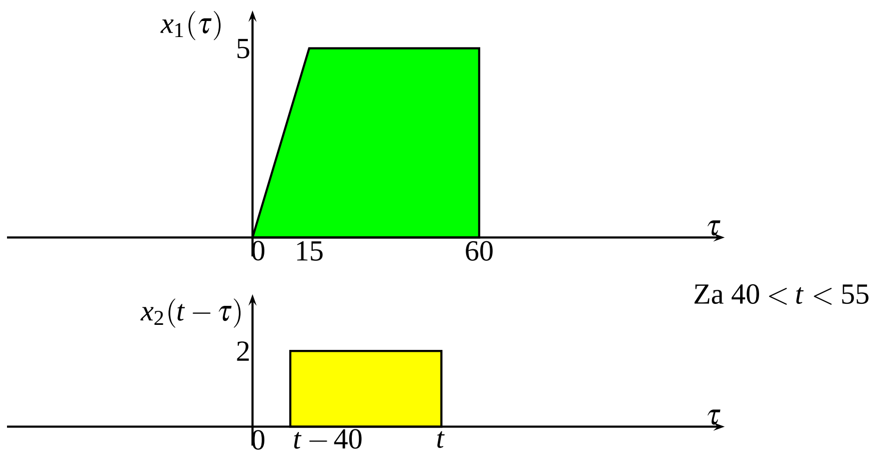
$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{15} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau + \int_{15}^{t} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \\ &= 75 + \int_{15}^{t} 5\cdot 2d\tau = 75 + 10\tau|_{15}^{t} = 75 + 10(t-15) = 10t - 75 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Za $t = 40$ vrednost konvolucije je $10 \cdot 40 - 75 = 325$. Ovo je maksimalna vrednost vremenskog pomeraja t (funkcije x_2) za koju je u potpunosti nenultim vrednostima funkcije x_2 prekriven linearni deo funkcije x_1.

U narednom koraku iračunavamo vrednost konvolucije za $40 < t < 55$ kada je još uvek delimično prekriven linearni deo funkcije x_1 nenultim vrednostima funkcije x_2. Ovaj slučaj je prikazan na slici 1.9, koja je data za $t = 50$.



Sl. 1.6:



Sl. 1.7:

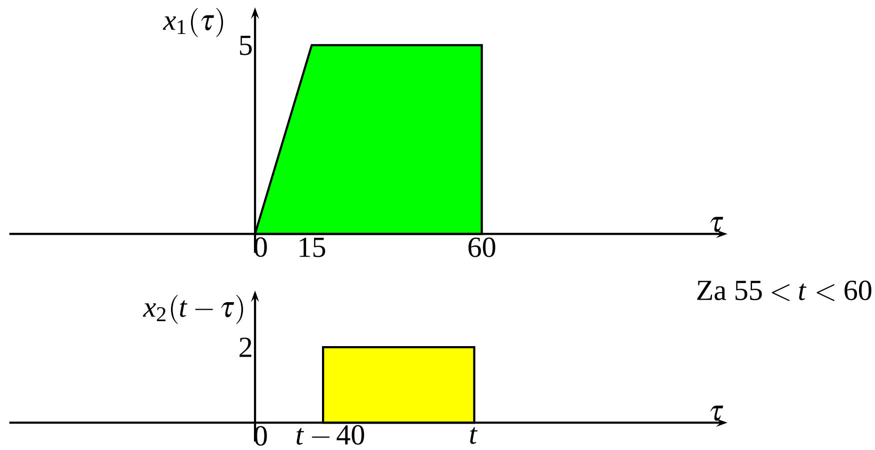
Konvoluciju izračunavamo na osnovu izraza

$$
\begin{aligned}
x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{t-40}^{15} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau + \int_{15}^{t} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \frac{\tau^2}{3}\Big|_{t-40}^{15} + \int_{15}^{t} 5\cdot 2d\tau \\
&= \frac{15^2-(t^2-80t+1600)}{3} + 10\tau\Big|_{15}^{t} = \frac{-t^2+80t-1600+225}{3} + 10(t-15) \\
&= \frac{-t^2+110t-1825}{3}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

na osnovu koga se dobija vrednost konvolucije 400 za $t = 55$.

Za $t > 55$ funkcija x_2 više se ne preklapa sa linearnim delom funkcije x_1. Konvolucija se izračunava samo preko jednog integrala pričemu su obe funkcije konstantne i imaju vrednosti 5 i 2. Naravno, sve ovo ima smisla samo dok je $t < 60$ kako bi imali interval na kome je u igri funkcija x_2 u potpunosti. Ovaj slučaj prikazan je na slici 1.8, a slika se odnosi na slučaj $t = 58$.

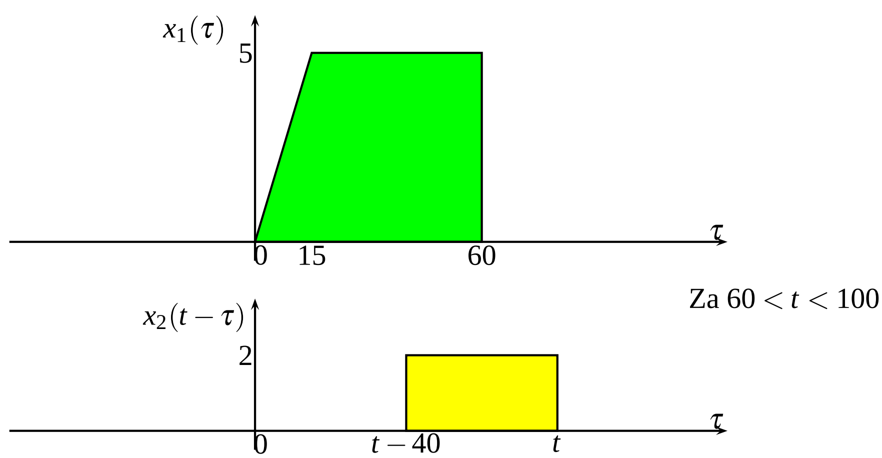
Konvoluciju sada izračunavamo pomoću izraza



Sl. 1.8:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-40}^{t} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{t-40}^{t} 5 \cdot 2d\tau = 10\tau|_{t-40}^{t} = 10((t-40)-t) = 400 = const \tag{1.6}$$

Do promene dolazi kada je $t > 60$ jer tada jedan deo funkcije x_2 se nalazi van opsega u kome je funkcija x_1 sa nenultim vrednostima, tako da taj deo funkcije x_2 ne utiče na konačnu vrednost. Kako t raste na sve manjem intervalu se funkcije x_1 i x_2 preklapaju što za posledicu daje da vrednost konvolucije opada. Slučaj za $60 < t < 100$ je prikazan na slici 1.9 a sama slika je data za $t = 80$.

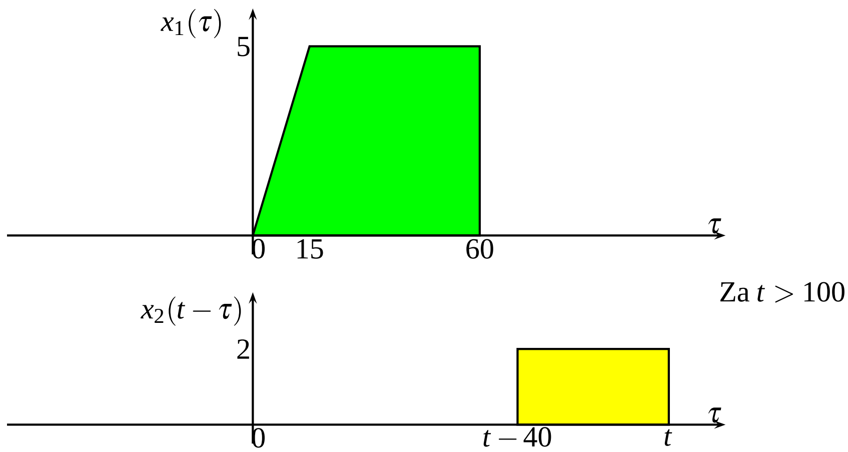


Sl. 1.9:

Na osnovu slike vidimo da se konvolucija izračunava na osnovu izraza

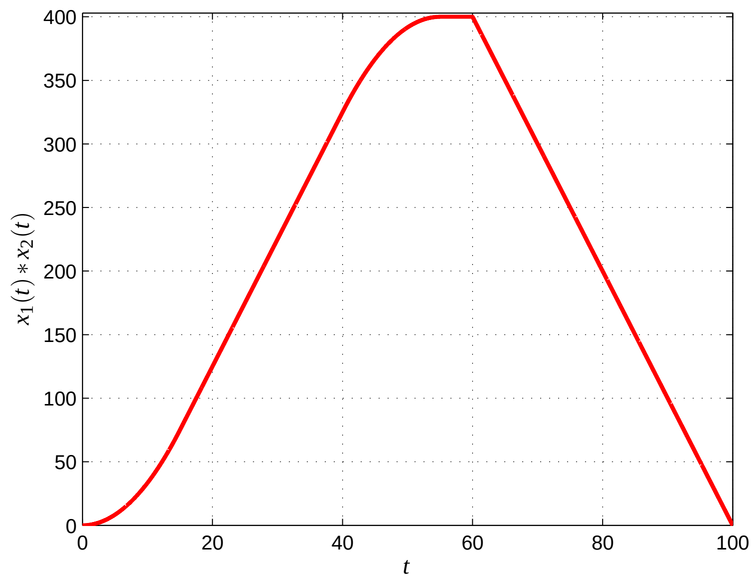
$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{t-40}^{60} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{t-40}^{60} 5 \cdot 2d\tau = 10\tau|_{t-40}^{60} = 10(60-(t-40)) = 10(100-t) = 1000-10t \end{aligned} \tag{1.7}$$

Za $t > 100$ nema preklapanja funkcija $x_1(\tau)$ i $x_2(t-\tau)$, tako da je podintegralna funkcija na celom opsegu integraljenja jednaka nuli pa i sama konvolucija ima nultu vrednost. Ovaj slučaj je prikazan na slici 1.10, a sama slika je data za $t = 110$.



Sl. 1.10:

Vrednost konvolucije prikazana je na slici 1.11



Sl. 1.11: Konvolucija signala.

Literatura