UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Zbirka zadataka

NIŠ, 2020.

Sadržaj

1

Izračunavanje inverzne $\mathscr{Z}$ transformacije

Inverzna $\mathscr{Z}$ transformacija omogućava da se odredi signal $f[n]$ krenuvši od njegove $\mathscr{Z}$ transformacije $F(z)$. Na raspolaganju su tri metode kojima se mogu odrediti odbirci signala $f[n]$.

1. Razvoj u parcijalne razlomke
2. Definicioni integral
3. Beskonačno deljenje polinoma

1.1 Razvoj u parcijalne razlomke

Na prethodnom času smo radili izračunavanje inverzne z transformacije razvijanjem izraza u parcijalne razlomke. Očekujem da do kraja semestra zbirka bude gotova u celosti, dakle da se ubace i oblasti koje smo već prešli na časovima. Redovno ću na sajtu katedre postavljati materijal a najkasnije u utorak kako bi u sredu bio dostupan za eventualna pitanja. Za konsultacije ću osim sredom od 12.00 do 14.00 biti dostupan i radnim danima od 20.00 do 21.00 h. Moj skype nalog: goran.stancic13

1.2 Definicioni integral

Odbirci signala u vremenskom domenu $f[n]$ se dobijaju konturnim integralom

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \tag{1.1}$$

gde C predstavlja zatvorenu konturu koja obuhvata sve polove podintegralne funkcije. Korišćenjem Košijeve teoreme o ostacima izračunavanje integrala se svodi na sumiranje ostataka u polovima podintegralne funkcije tj.

$$f[n] = \sum_k Res\left[F(z) z^{n-1}\right]\Big|_{z=p_k} \tag{1.2}$$

gde su sa p_k obeleženi polovi podintegralne funkcije $F(z)z^{n-1}$ a $Res\left[F(z)z^{n-1}\right]$ predstavljaju ostatke u polovima $z = p_k$.

Zadatak 21 Upotrebom definicionog integrala odrediti inverznu $\mathscr{Z}$ transformaciju izraza

$$F(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0.75z^{-1})} \tag{1.3}$$

Rešenje

Množenjem brojioca i imenioca izraza (1.3) sa z^3 dobija se

$$F(z) = \frac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.75)} \tag{1.4}$$

Primenom izraza (1.2) se dobija

$$f[n] = \sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-1}}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k} = \sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k} \tag{1.5}$$

Zanima nas da odredimo vrednosti svih odbiraka signla $f[n]$, tj. vrednosti $f[0]$, $f[1]$, $f[2],\dots$, odnosno vrednosti za $n = 0,1,2,\dots$.

Za $n = 0$ izraz (1.5) postaje

$$\begin{aligned} f[0] = \sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k} &= Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0} \\ + Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1} &+ Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0.75} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Napomena: kada je pol dvostruk, kao što je sada slučaj sa polom u koordinatnom početku ($z = 0$) razvojem u parcijalne razlomke javljaju se dva člana oblika

$$\frac{r_1}{z^2} + \frac{r_2}{z}$$

Ostatak u polu koji treba izračunati za izraz (1.6) je vrednost r_2. Ostatak u polu r_1 računa se na osnovu izraza

$$r_1 = \lim_{z\to 0} \frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)} \tag{1.7}$$

Ovu vrednost nije neophodno izračunavati ali nam je ovaj izraz potreban za određivanje r_2 tj.

$$\begin{aligned} r_2 &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\Big\{\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)}\Big\} = \lim_{z\to 0} \frac{(3z^2+4z)(z-1)(z-0.75)-(z^3+2z^2+1)[1\cdot(z-0.75)+(z-1)\cdot 1]}{(z-1)^2(z-0.75)^2} \\ &= \frac{0(-1)(-0.75)-(0+0+1)[1\cdot(-0.75)+(0-1)\cdot 1]}{(-1)^2(-0.75)^2} = \frac{28}{9} \end{aligned} \tag{1.8}$$

tako da prvi odbirak signala $f[n]$ ima vrednost

$$\begin{aligned} f[0] &= r_2 + \lim_{z\to 1} \frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-0.75)} + \lim_{z\to 0.75} \frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)} \\ &= \frac{28}{9} + \frac{4}{0.25} + \frac{0.75^3+2\cdot 0.75^2+1}{0.75^2\cdot(-0.25)} = 1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Za $n = 1$ izraz (1.5) postaje

$$\begin{aligned}
f[1] &= \sum_k Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=p_k} = Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=0} \\
&+ Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=1} + Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=0.75} \\
&= \big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=0} + \big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-0.75)}\big]\Big|_{z=1} + \big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)}\big]\Big|_{z=0.75} \\
&= \frac{1}{(-1)(-0.75)} + \frac{4}{0.25} + \frac{0.75^3+2\cdot 0.75^2+1}{0.75(-0.25)} = \frac{4}{3} + 16 - \frac{163}{12} = \frac{15}{4}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Za $n \geq 2$ podintegralna funkcija ne poseduje pol u $z = 0$ tako da preostaju samo polovi u $z = 1$ i $z = 0.75$. Sada se odbirci signala $f[n]$ računaju na osnovu izraza

$$\begin{aligned}
f[n] &= \sum_k Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=p_k} \\
&= Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=1} + Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\big]\Big|_{z=0.75} \\
&= \lim_{z\to 1}\big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-0.75)}\big] + \lim_{z\to 0.75}\big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)}\big] \\
&= \frac{4\cdot 1^{n-2}}{(0.25)} + \frac{(0.75^3+2\cdot 0.75^2+1)0.75^{n-2}}{-0.25} = 16 + \frac{(163/64)0.75^n}{(-0.25)0.75^2} = 16 - \frac{163}{9}0.75^n
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Na ovaj način određeni su svi elementi signala $f[n]$ tj.

$$f[n] = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n = 0 \\ \dfrac{15}{4} & \text{za} \quad n = 1 \\ 16 - \dfrac{163}{9}0.75^n & \text{za} \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.12}$$

U nastavku ćemo samo pokušati da dobijeni rezultat damo u kompaktnijem obliku. Vrednost izraza $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ za $n = 0$ je $16 - \frac{163}{9} = \frac{16\cdot 9-163}{9} = \frac{144-163}{9} = \frac{-19}{9}$. Za $n = 0$ odbirak signala $f[n]$ ima vrednost $1 = \frac{9}{9}$, tako da je izraz $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ za $n = 0$ potrebno korigovati ($1 = \frac{-19}{9} + korekcija_1$) za vrednost $\frac{28}{9}$.

Za $n = 1$ izraz $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ (koji važi samo za $n \geq 2$) ima vrednost $16 - \frac{163}{9}\frac{3}{4} = \frac{29}{12}$ a odbirak signala $f[n]$ iznosi $\frac{15}{4}$, tako da vrednost izraza (1.14) treba korigovati za vrednost $\frac{4}{3}$ (dobijena iz jednačine $\frac{15}{4} = \frac{29}{12} + korekcija_2$).

Ovo nam omogućava da signal $f[n]$ zapišemo u obliku

$$f[n] = \frac{28}{9}\delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + 16 - \frac{163}{9}0.75^n \qquad \text{za} \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.13}$$

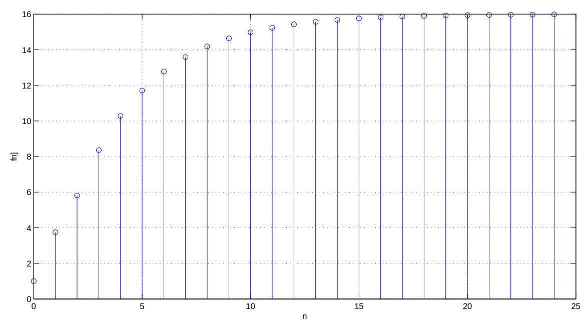
Ovako dobijen rezultat možemo lako proveriti korišćenjem Matlaba.

```
syms z n
Fz=(z^3+2*z^2+1)/(z*(z-1)*(z-0.75))
fn=iztrans(Fz)
```

na osnovu čega se dobija

```
fn =
(4*kroneckerDelta(n - 1, 0))/3 - (163*(3/4)^n)/9 +
(28*kroneckerDelta(n, 0))/9 + 16
```

Na slici 1.1 je prikazano prvih 25 odbiraka signala $f[n]$.



Sl. 1.1: Signal $f[n]$, prvih 25 odbiraka

1.3 Beskonačno deljenje polinoma

Zadatak 31 Metodom beskonačnog deljenja polinoma odrediti prva 4 člana signala $f[n]$ čija $\mathscr{Z}$ transformacija ima vrednost

$$F(z) = \frac{1+z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}}{(1-0.25z^{-1})(1-0.5z^{-1})(1-0.75z^{-1})} \tag{1.14}$$

Resenje:

Pre nego se pristupi deljenju polinoma neophodno je pomnožiti brojilac i imenilac sa z^3, čime se dobija

$$F(z) = \frac{z^3+z^2+2z+3}{(z-0.25)(z-0.5)(z-0.75)} \tag{1.15}$$

a potom srediti imenilac kako bi se dobili polinomi po promenljivoj z sa elementima koji su poređani u opadajućem redosledu stepena. U tu svrhu možemo iskoristiti Matlab koristeći naredbe

```
syms z
Imenilac=collect((z-0.25)*(z-0.5)*(z-0.75))
```

što kao rezultat daje

```
Imenilac =

z^3 - (3*z^2)/2 + (11*z)/16 - 3/32
```

a na osnovu čega izraz (1.15) postaje

$$F(z) = \frac{z^3+z^2+2z+3}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z-\frac{3}{32}} \tag{1.16}$$

a čijim se deljenjem dobija prvi član signala $f[n]$.

$$
\begin{array}{l}
(z^3+z^2+2z+3):(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}) = 1+\frac{\frac{5}{2}z^2+\frac{21}{16}z+\frac{99}{32}}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}}\\
-z^3+\frac{3}{2}z^2-\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}\\
\hline
\frac{5}{2}z^2+\frac{21}{16}z+\frac{99}{32}
\end{array}
\tag{1.17}
$$

Za deljenje polinoma može biti iskorišćen Matlab. Polinomi se unose kao vektori, tj. nizovi brojeva koji odgovaraju koeficijentima polinoma gde se podrazumeva da su članovi uneseni po opadajućoj vrednosti stepena. U konkretnom slučaju

```
brojilac=[1 1 2 3 ]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
```

Polinome delmo naredbom `deconv` i kao rezultat se dobija količnik r i ostatak deljenja q

```
[r,q]=deconv(brojilac, imenilac)
```

što kao rezutat daje

```
r =

     1


q =

          0    2.5000    1.3125    3.0938
```

U nastavku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.17)

$$
\begin{array}{l}
(\frac{5}{2}z^2+\frac{21}{16}z+\frac{99}{32}):(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}) = \frac{5}{2}z^{-1}+\frac{\frac{81}{16}z+\frac{44}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}}\\
-\frac{5}{2}z^2+\frac{15}{4}z-\frac{55}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}\\
\hline
\frac{81}{16}z+\frac{44}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}
\end{array}
\tag{1.18}
$$

U narednom koraku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.18)

$$
\begin{array}{l}
(\frac{81}{16}z+\frac{44}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}):(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}) = \frac{81}{16}z^{-2}+\frac{\frac{287}{32}-\frac{831}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}}\\
-\frac{81}{16}z+\frac{243}{32}-\frac{891}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}\\
\hline
\frac{287}{32}-\frac{831}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}
\end{array}
\tag{1.19}
$$

S obzirom na opisanu proceduru i činjenice da deljenje izvodimo sa z^3 u narednom koraku bi se dobio količnik $\frac{287}{32}z^{-3}$. Uzevši u obzir sve prethodne izraze zaključujemo da je

$$F(z) = 1 + \frac{5}{2}z^{-1} + \frac{81}{16}z^{-2} + \frac{287}{32}z^{-3} + \frac{Naredniostatakdeljenja}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \tag{1.20}$$

Na osnovu izraza (1.20) zaključujemo da je

$$f[0] = 1, f[1] = \frac{5}{2}, f[2] = \frac{81}{16}, f[3] = \frac{287}{32}, \ldots$$

s obzirom da z^{-1} ima fizički smisao i odgovara kašnjenju signala za jedan period odabiranja. Slično, član Bz^{-2} predstavlja odbirak amplitude B koji kasni za dva perioda odabiranja (taktna intervala) u odnosu na prvi odbirak koji je obeležen kao $f[0]$. Uostalom, do istog zaključka se dolazi i krenuvši od definicije $\mathscr{Z}$ transformacije

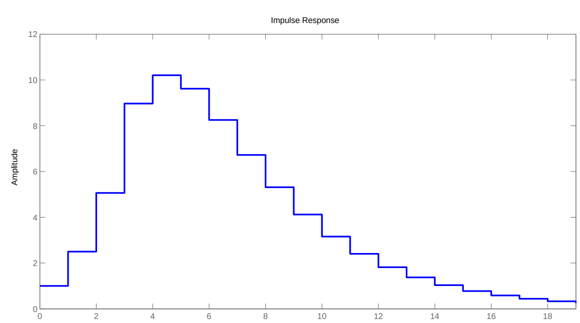
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \ldots$$

Upoređivanjem ovog izraza sa izrazom (1.20) lako se uočavaju vrednosti odbiraka $f[0]$, $f[1]$, ...

Signal $f[n]$ u Matlabu može biti određen i naredbom dimpulse, čiji su ulazni argumenti koeficijenti polinoma iz brojioca i imenioca kao i dužina signala. Prvih 20 odbiraka signala $f[n]$ biće određeni naredbama

```
brojilac=[1 1 2 3]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
fn=dimpulse(brojilac,imenilac,20)
dimpulse(brojilac,imenilac,20)
```

Ovako određen signal $f[n]$ prikazan je na slici 1.2. (Naredba dimpulse služi za određivanje prvih n članova ipulsnog odziva sistema čija je prenosna funkcija data preko polinoma.)



Sl. 1.2: Signal $f[n]$, prvih 20 odbiraka

Ova metoda, za razliku od opisane prethodne dve nije praktična odnosno pogodna za određivanje vrednosti signala u vremenskom domenu na osnovu poznate $\mathscr{Z}$ transformacije jer je za određivanje n-tog člana neophodno odrediti svih $n-1$ prethodnih a svi se dobijaju deljenjem dva polinoma.