UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Zbirka zadataka

NIŠ, 2020.

Sadržaj

1

Izračunavanje inverzne $\mathscr{Z}$ transformacije

Inverzna $\mathscr{Z}$ transformacija omogućava da se odredi signal $f[n]$ krenuvši od njegove $\mathscr{Z}$ transformacije $F(z)$. Na raspolaganju su tri metode kojima se mogu odrediti odbirci signala $f[n]$.

1. Razvoj u parcijalne razlomke
2. Definicioni integral
3. Beskonačno deljenje polinoma

1.1 Razvoj u parcijalne razlomke

Na prethodnom času smo radili izračunavanje inverzne z transformacije razvijanjem izraza u parcijalne razlomke. Očekujem da do kraja semestra zbirka bude gotova u celosti, dakle da se ubace i oblasti koje smo već prešli na časovima. Redovno ću na sajtu katedre postavljati materijal a najkasnije u utorak kako bi u sredu bio dostupan za eventualna pitanja. Za konsultacije ću osim sredom od 12.00 do 14.00 biti dostupan i radnim danima od 20.00 do 21.00 h. Moj skype nalog: goran.stancic13

1.2 Definicioni integral

Odbirci signala u vremenskom domenu $f[n]$ se dobijaju konturnim integralom

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \tag{1.1}$$

gde C predstavlja zatvorenu konturu koja obuhvata sve polove podintegralne funkcije. Korišćenjem Košijeve teoreme o ostacima izračunavanje integrala se svodi na sumiranje ostataka u polovima podintegralne funkcije tj.

$$f[n] = \sum_k Res\left[F(z) z^{n-1}\right]\Big|_{z=p_k} \tag{1.2}$$

gde su sa p_k obeleženi polovi podintegralne funkcije $F(z)z^{n-1}$ a $Res\left[F(z)z^{n-1}\right]$ predstavljaju ostatke u polovima $z = p_k$.

Zadatak 21 Upotrebom definicionog integrala odrediti inverznu $\mathscr{Z}$ transformaciju izraza

$$F(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0.75z^{-1})} \tag{1.3}$$

Rešenje

Množenjem brojioca i imenioca izraza (1.3) sa z^3 dobija se

$$F(z)=\frac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.75)} \tag{1.4}$$

Primenom izraza (1.2) se dobija

$$f[n]=\sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-1}}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k}=\sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k} \tag{1.5}$$

Zanima nas da odredimo vrednosti svih odbiraka signla $f[n]$, tj. vrednosti $f[0]$, $f[1]$, $f[2],\ldots$, odnosno vrednosti za $n=0,1,2,\ldots$.

Za $n=0$ izraz (1.5) postaje

$$\begin{aligned}f[0]&=\sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k}=Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0}\\&+Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1}+Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0.75}\end{aligned} \tag{1.6}$$

Napomena: kada je pol dvostruk, kao što je sada slučaj sa polom u koordinatnom početku ($z=0$) razvojem u parcijalne razlomke javljaju se dva člana oblika

$$\frac{r_1}{z^2}+\frac{r_2}{z}$$

Ostatak u polu koji treba izračunati za izraz (1.6) je vrednost r_2. Ostatak u polu r_1 računa se na osnovu izraza

$$r_1=\lim_{z\to 0}\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)} \tag{1.7}$$

Ovu vrednost nije neophodno izračunavati ali nam je ovaj izraz potreban za određivanje r_2 tj.

$$\begin{aligned}r_2&=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\Big\{\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)}\Big\}=\lim_{z\to 0}\frac{(3z^2+4z)(z-1)(z-0.75)-(z^3+2z^2+1)[1\cdot(z-0.75)+(z-1)\cdot 1]}{(z-1)^2(z-0.75)^2}\\&=\frac{0(-1)(-0.75)-(0+0+1)[1\cdot(-0.75)+(0-1)\cdot 1]}{(-1)^2(-0.75)^2}=\frac{28}{9}\end{aligned} \tag{1.8}$$

tako da prvi odbirak signala $f[n]$ ima vrednost

$$\begin{aligned}f[0]&=r_2+\lim_{z\to 1}\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-0.75)}+\lim_{z\to 0.75}\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)}\\&=\frac{28}{9}+\frac{4}{0.25}+\frac{0.75^3+2\cdot 0.75^2+1}{0.75^2\cdot(-0.25)}=1\end{aligned} \tag{1.9}$$

Za $n=1$ izraz (1.5) postaje

$$
\begin{aligned}
f[1] &= \sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k} = Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0} \\
&+ Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1} + Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0.75} \\
&= \Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0} + \Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1} + \Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)}\Big]\Big|_{z=0.75} \\
&= \frac{1}{(-1)(-0.75)} + \frac{4}{0.25} + \frac{0.75^3+2\cdot 0.75^2+1}{0.75(-0.25)} = \frac{4}{3} + 16 - \frac{163}{12} = \frac{15}{4}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Za $n \geq 2$ podintegralna funkcija ne poseduje pol u $z=0$ tako da preostaju samo polovi u $z=1$ i $z=0.75$. Sada se odbirci signala $f[n]$ računaju na osnovu izraza

$$
\begin{aligned}
f[n] &= \sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k} \\
&= Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1} + Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0.75} \\
&= \lim_{z\to 1}\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-0.75)}\Big] + \lim_{z\to 0.75}\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)}\Big] \\
&= \frac{4\cdot 1^{n-2}}{(0.25)} + \frac{(0.75^3+2\cdot 0.75^2+1)0.75^{n-2}}{-0.25} = 16 + \frac{(163/64)0.75^n}{(-0.25)0.75^2} = 16 - \frac{163}{9}0.75^n
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Na ovaj način određeni su svi elementi signala $f[n]$ tj.

$$
f[n] = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n=0 \\ \dfrac{15}{4} & \text{za} \quad n=1 \\ 16 - \dfrac{163}{9}0.75^n & \text{za} \quad n \geq 2 \end{cases}
\tag{1.12}
$$

U nastavku ćemo samo pokušati da dobijeni rezultat damo u kompaktnijem obliku. Vrednost izraza $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ za $n=0$ je $16 - \frac{163}{9} = \frac{16\cdot 9-163}{9} = \frac{144-163}{9} = \frac{-19}{9}$. Za $n=0$ odbirak signala $f[n]$ ima vrednost $1 = \frac{9}{9}$, tako da je izraz $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ za $n=0$ potrebno korigovati ($1 = \frac{-19}{9} + korekcija_1$) za vrednost $\frac{28}{9}$.

Za $n=1$ izraz $16 - \frac{163}{9}0.75^n$ (koji važi samo za $n \geq 2$) ima vrednost $16 - \frac{163}{9}\frac{3}{4} = \frac{29}{12}$ a odbirak signala $f[n]$ iznosi $\frac{15}{4}$, tako da vrednost izraza (1.14) treba korigovati za vrednost $\frac{4}{3}$ (dobijena iz jednačine $\frac{15}{4} = \frac{29}{12} + korekcija_2$).

Ovo nam omogućava da signal $f[n]$ zapišemo u obliku

$$
f[n] = \frac{28}{9}\delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + 16 - \frac{163}{9}0.75^n \qquad \text{za} \qquad n = 0,1,2,\ldots
\tag{1.13}
$$

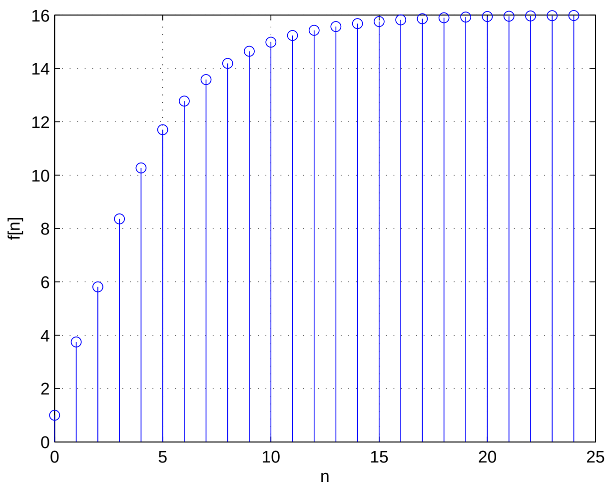
Ovako dobijen rezultat možemo lako proveriti korišćenjem MATLAB® -a.

```
syms z n
Fz=(z^3+2*z^2+1)/(z*(z-1)*(z-0.75))
fn=iztrans(Fz)
```

na osnovu čega se dobija

```
fn =
(4*kroneckerDelta(n - 1, 0))/3 - (163*(3/4)^n)/9 +
(28*kroneckerDelta(n, 0))/9 + 16
```

Na slici 1.1 je prikazano prvih 25 odbiraka signala $f[n]$.



Sl. 1.1: Signal $f[n]$, prvih 25 odbiraka

1.3 Beskonačno deljenje polinoma

Zadatak 31 Metodom beskonačnog deljenja polinoma odrediti prva 4 člana signala $f[n]$ čija $\mathscr{Z}$ transformacija ima vrednost

$$F(z) = \frac{1+z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}}{(1-0.25z^{-1})(1-0.5z^{-1})(1-0.75z^{-1})} \tag{1.14}$$

Resenje:

Pre nego se pristupi deljenju polinoma neophodno je pomnožiti brojilac i imenilac sa z^3, čime se dobija

$$F(z) = \frac{z^3+z^2+2z+3}{(z-0.25)(z-0.5)(z-0.75)} \tag{1.15}$$

a potom srediti imenilac kako bi se dobili polinomi po promenljivoj z sa elementima koji su poređani u opadajućem redosledu stepena. U tu svrhu možemo iskoristiti MATLAB® koristeći naredbe

```
syms z
Imenilac=collect((z-0.25)*(z-0.5)*(z-0.75))
```

što kao rezultat daje

```
Imenilac =

z^3 - (3*z^2)/2 + (11*z)/16 - 3/32
```

a na osnovu čega izraz (1.15) postaje

$$F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 2z + 3}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z - \frac{3}{32}} \tag{1.16}$$

a čijim se deljenjem dobija prvi član signala $f[n]$.

$$\begin{array}{l} (z^3 + z^2 + 2z + 3) : (z^3 - \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{11}{16}z + \dfrac{3}{32}) = 1 + \dfrac{\frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{16}z + \frac{99}{32}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \\ -z^3 + \dfrac{3}{2}z^2 - \dfrac{11}{16}z + \dfrac{3}{32} \\ \hline \qquad \dfrac{5}{2}z^2 + \dfrac{21}{16}z + \dfrac{99}{32} \end{array} \tag{1.17}$$

Za deljenje polinoma može biti iskorišćen MATLAB® . Polinomi se unose kao vektori, tj. nizovi brojeva koji odgovaraju koeficijentima polinoma gde se podrazumeva da su članovi uneseni po opadajućoj vrednosti stepena. U konkretnom slučaju

```
brojilac=[1 1 2 3 ]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
```

Polinome delmo naredbom deconv i kao rezultat se dobija količnik r i ostatak deljenja q

```
[r,q]=deconv(brojilac, imenilac)
```

što kao rezutat daje

```
r =

     1


q =

          0    2.5000    1.3125    3.0938
```

U nastavku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.17)

$$\begin{array}{l} (\dfrac{5}{2}z^2 + \dfrac{21}{16}z + \dfrac{99}{32}) : (z^3 - \dfrac{3}{2}z^2 + \dfrac{11}{16}z + \dfrac{3}{32}) = \dfrac{5}{2}z^{-1} + \dfrac{\frac{81}{16}z + \frac{44}{32} + \frac{15}{64}z^{-1}}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \\ -\dfrac{5}{2}z^2 + \dfrac{15}{4}z - \dfrac{55}{32} + \dfrac{15}{64}z^{-1} \\ \hline \qquad \dfrac{81}{16}z + \dfrac{44}{32} + \dfrac{15}{64}z^{-1} \end{array} \tag{1.18}$$

U narednom koraku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.18)

$$
\begin{array}{l}
(\frac{81}{16}z+\frac{44}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}):(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32})=\frac{81}{16}z^{-2}+\frac{\frac{287}{32}-\frac{831}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}}\\
-\frac{81}{16}z+\frac{243}{32}-\frac{891}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}\\
\hline
\frac{287}{32}-\frac{831}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}
\end{array}
\tag{1.19}
$$

S obzirom na opisanu proceduru i činjenice da deljenje izvodimo sa z^3 u narednom koraku bi se dobio količnik $\frac{287}{32}z^{-3}$. Uzevši u obzir sve prethodne izraze zaključujemo da je

$$
F(z)=1+\frac{5}{2}z^{-1}+\frac{81}{16}z^{-2}+\frac{287}{32}z^{-3}+\frac{Naredniostatakdeljenja}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}}
\tag{1.20}
$$

Na osnovu izraza (1.20) zaključujemo da je

$$
f[0]=1, f[1]=\frac{5}{2}, f[2]=\frac{81}{16}, f[3]=\frac{287}{32},\dots
$$

s obzirom da z^{-1} ima fizički smisao i odgovara kašnjenju signala za jedan period odabiranja. Slično, član Bz^{-2} predstavlja odbirak amplitude B koji kasni za dva perioda odabiranja (taktna intervala) u odnosu na prvi odbirak koji je obeležen kao $f[0]$. Uostalom, do istog zaključka se dolazi i krenuvši od definicije $\mathscr{Z}$ transformacije

$$
F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f[n]z^{-n}=f[0]+f[1]z^{-1}+f[2]z^{-2}+\dots
$$

Upoređivanjem ovog izraza sa izrazom (1.20) lako se uočavaju vrednosti odbiraka $f[0]$, $f[1]$, ...

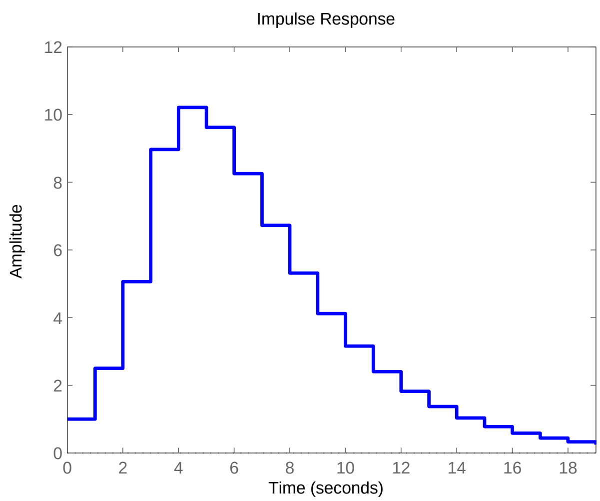
Signal $f[n]$ u MATLAB® -u može biti određen i naredbom dimpulse, čiji su ulazni argumenti koeficijenti polinoma iz brojioca i imenioca kao i dužina signala. Prvih 20 odbiraka signala $f[n]$ biće određeni naredbama

```
brojilac=[1 1 2 3]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
fn=dimpulse(brojilac,imenilac,20)
dimpulse(brojilac,imenilac,20)
```

Ovako određen signal $f[n]$ prikazan je na slici 1.2. (Naredba dimpulse služi za određivanje prvih n članova ipulsnog odziva sistema čija je prenosna funkcija data preko polinoma.)

Ova metoda, za razliku od opisane prethodne dve nije praktična odnosno pogodna za određivanje vrednosti signala u vremenskom domenu na osnovu poznate $\mathscr{Z}$ transformacije jer je za određivanje n-tog člana neophodno odrediti svih $n-1$ prethodnih a svi se dobijaju deljenjem dva polinoma.

Najvažnije osobine tri opisane metode date su u tabeli 1.1.



Sl. 1.2: Signal $f[n]$, prvih 20 odbiraka

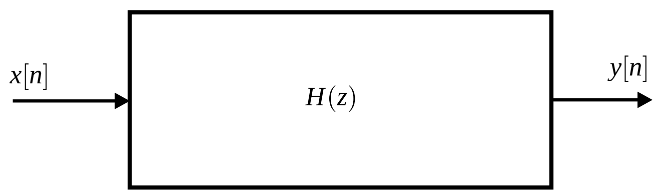
Tab. 1.1: Osobine metoda za izračunavanje inverzne $\mathscr{Z}$ transformacije

Metod	Prednosti	Mane
Razvoj na parcijalne razlomke	♡ Dobro poznata ♡ Može se koristiti MATLAB® naredba residue	✠ Neophodno je da $F(z)$ bude racionalna funkcija
Definicioni integral	♡ Može se koristiti i kada $F(z)$ nije racionalna funkcija	✠ Zahteva poznavanje teoreme o ostacima
Beskonačno deljenje polinoma	♡ Korisna kada se traži mali broj odbiraka ♡ Korisna kada inverzna $\mathscr{Z}$ transformacija nema rešenje u zatvorenom obliku ♡ Može se koristiti MATLAB® naredba dimpulse	✠ $F(z)$ mora da bude racionalna funkcija ✠ Deljenje može biti beskonačno

2

Prenosna funkcija diskretnih sistema

Diskretni sistem prikazan na slici 2.1



Sl. 2.1: Blok dijagram diskretnog sistema

može biti opisan *diferencnom* jednačinom

$$\begin{aligned} y[n] + b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] + b_3 y[n-3] \cdots + b_k y[n-k] \\ = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + a_3 x[n-3] + \cdots + a_k x[n-k] \end{aligned} \tag{2.1}$$

gde a_i i b_i predstavljaju konstantne koeficijente. Prethodni izraz može biti dat u kompaktnijoj formi ako izraz (2.1) napišemo u obliku

$$\begin{aligned} y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + a_3 x[n-3] + \cdots + a_k x[n-k] \\ - \big(b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] + b_3 y[n-3] \cdots + b_k y[n-k] \big) \end{aligned} \tag{2.2}$$

odnosno

$$y[n] = \sum_{i=0}^{k} a_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{k} b_i y[n-i] \tag{2.3}$$

Dakle, u opštem slučaju n-ti odbirak izlaznog signala $y[n[$ (koji se pojavljuje u trenutku nT, gde je T period odmeravanja ulaznog signala, na vremenskoj osi na kojoj smo nultim trenutkom proglasili poziciju kada se pojavio prvi odbirak ulaznog signala) zavisi od vrednosti prisutne na ulazu tj. od $x[n]$ ali i od k vrednosti koje su bile prisutne kako na ulazu sistema ($x[n-1], \ldots, x[n-k]$) tako i na izlazu sistema ($y[n-1], \ldots, y[n-k]$). Ovo ukazuje na činjenicu da je i kod softverske i kod hardverske realizacije diskretnog sistem neophodno nekako sačuvati k poslednjih odbiraka ulaznog i izlaznog signala. Kod softverske realizacije će biti neophodno da se rezerviše memorija dužine $2k$ za ove potrebe a kad je u pitanju hardverska realizacija za to će biti iskorišćena dva pomeračka n-tobitna (eng. *shift*) registra dužine k, gde n ukazuje na broj bitova koji je predviđen za predstavljanje koeficijenata a_i i b_i. Na osnovu izraza (2.3) uočavamo da se najnoviji izlazni odbirak označen sa $y[n]$ dobija samo na osnovu operacija množenja i sabiranja nad odbircima ulaznog i izlaznog signala.

Dakle za hardversku realzicaiju bilo kog diskretnog sistema dovoljno je iskoristiti sabirače, množače i memorijske elemente (pomerački registar će praktično igrati ulogu elementa za kašnjenje jer on u sebi čuva uvek k poslednjih odbiraka signala, koji se pomeraju za jedno mesto pri pojavi svakog taktnog impulsa a čiji je razmak upravo jednak periodi odabiranja signala, tj. ceo sistem radi na frekvenciji F_s (frekvencija odabiranja, eng. *Sampling frequency*)).

Ako pretpostavimo da su svi početni uslovi jednaki nuli, tj. da je $x[i] = 0$ i $y[i] = 0$ za $i < 0$, izračunavanjem $\mathscr{Z}$ transformacije leve i desne strane izraza (2.3), uzimajući u obzir osobinu $\mathscr{Z}$ transformacije

$$f[n-m] \Leftrightarrow z^{-m}F(z)$$

dobija se

$$\begin{aligned} &Y(z) + b_1 z^{-1}Y(z) + b_2 z^{-2}Y(z) + b_3 z^{-3}Y(z) \cdots + b_k z^{-k}Y(z) \\ &\quad = a_0 X(z) + a_1 z^{-1}X(z) + a_2 z^{-2}X(z) + a_3 z^{-3}X(z) + \cdots + a_k z^{-k}X(z) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Izvlačenjem ispred zagrada $X(z)$ i $Y(z)$

$$\begin{aligned} &Y(z)\left[1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} \cdots + b_k z^{-k}\right] \\ &\quad = X(z)\left[a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_k z^{-k}\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

dolazimo do veze između $\mathscr{Z}$ transformacija izlaznog i ulaznog signala sistema

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_k z^{-k}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} \cdots + b_k z^{-k}} X(z) \tag{2.6}$$

U prethodnom izrazu racionalna funkcija dva polinoma po promenljivoj z predstavlja prenosnu funkciju sistema

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_k z^{-k}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} \cdots + b_k z^{-k}} \tag{2.7}$$

odnosno dolazimo do očekivane veze

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{2.8}$$

Dakle, $\mathscr{Z}$ transformacija izlaznog signala se dobija množenjem prenosne funkcije sistema i $\mathscr{Z}$ transformacije ulaznog signala. Vrednost izlaznog signala u vremenskom domenu $y[n]$ dobijamo inverznom $\mathscr{Z}$ transformacijom nad $Y(z)$.

Impulsni odziv diskretnog sistema $h[n]$ se dobija na izlazu sistema ako je na njegovom ulazu prisutan jedinični impuls (Dirakov impuls) $x[n] = \delta[n]$. Kako je

$$\mathscr{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \tag{2.9}$$

na osnovu izraza (2.8) je

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \cdot 1 = H(z) \tag{2.10}$$

odnosno, impulsni odziv diskretnog sistema se može dobiti inverznom $\mathscr{Z}$ transformacijom prenosne funkcije sistema

$$y[n] = h[n] = \mathscr{Z}^{-1}\left\{H(z)\right\} \tag{2.11}$$

Zadatak 31 Diferencna jednačina koja daje vezu između odbiraka ulaznog i izlaznog signala diskretnog sistema, data je izrazom

$$y[n]-0.5y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+x[n-1] \tag{2.12}$$

Izračunati

a) Prenosnu funkciju sistema $H(z)$

b) Diskretni impulsni odziv sistema $h[n]$

c) Odziv ovog sistema ako se na njegovom ulazu nalazi jedinična funkcija (Hevisajdova funkcija) $u_0[n]$

Rešenje:

a) Nalaženjem $\mathscr{Z}$ transformacije leve i desne strane izraza (2.12)

$$Y(z)-0.5z^{-1}Y(z)+0.125z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z) \tag{2.13}$$

odnosno

$$Y(z)\left[1-0.5z^{-1}+0.125z^{-2}\right]=X(z)\left[1+z^{-1}\right] \tag{2.14}$$

dolazi se do prenosne funkcije diskretnog sistema

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.125z^{-2}}=\frac{z^2+z}{z^2-0.5z+0.125} \tag{2.15}$$

b) Da bi se odredio impulsni odziv sistema $h[n[$ potrebno je izračunati inverznu $\mathscr{Z}$ transformaciju izraza (2.15). Koristićemo postupak razvoja u parcijalne razlomke kod kog se ne razvija sama funkcija $H(z)$ već

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z+1}{z^2-0.5z+0.125} \tag{2.16}$$

Kako je polinom u brojiocu nižeg reda od polinoma u imeniocu, može se odmah pristupiti razvoju ove funkcije. Polinom u imeniocu ima nule (što su polovi prenosne funkcije)

$$z_{1,2}=\frac{0.5\pm\sqrt{0.5^2-4\cdot 0.125}}{2}=\frac{0.5\pm\sqrt{0.25-0.5}}{2}=\frac{0.5\pm j0.5}{2}=0.25\pm j0.25$$

pa možemo pisati

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{r_1}{z-z_1}+\frac{r_2}{z-z_2}=\frac{r_1}{z-(0.25+j0.25)}+\frac{r_2}{z-(0.25-j0.25)}$$

Ostaci u polovima imaju vrednost

$$r_1=\lim_{z\to 0.25+j0.25}\frac{z+1}{z-(0.25-j0.25)}=\frac{0.25+j0.25+1}{0.25+j0.25-(0.25-j0.25)}=\frac{1.25+j0.25}{j0.5}=0.5-j2.5$$

dok se r_2 izračunava iz izraza

$$r_2=\lim_{z\to 0.25-j0.25}\frac{z+1}{z-(0.25+j0.25)}$$

koji nije neophodno dovesti do kraja s obzirom da konjugovano kompleksni polovi imaju konjugovano kompleksne ostatke, tj. $r_2=r_1^*=0.5+j2.5$, čime smo došli do identiteta

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{0.5 - j2.5}{z - 0.25 - j0.25} + \frac{0.5 + j2.5}{z - 0.25 + j0.25}$$

Uzevši u obzir da stepena funkcija ima $\mathscr{Z}$ transformaciju

$$a^n u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

za $|z| > a$, inverzna $\mathscr{Z}$ transformacija nas dovodi do vrednosti impulsnog odziva

$$\begin{aligned}
h[n] &= (0.5 - j2.5)(0.25 + j0.25)^n + (0.5 + j2.5)(0.25 - j0.25)^n \\
&= (0.5 - j2.5)(0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4})^n + (0.5 + j2.5)(0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^n \\
&= 0.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{jn\pi/4}] + 0.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{-jn\pi/4}] \\
&- j2.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{jn\pi/4}] + j2.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{-jn\pi/4}] \\
&= 0.5[(0.25\sqrt{2})^n (e^{jn\pi/4} + e^{-jn\pi/4})] - j2.5[(0.25\sqrt{2})^n (e^{jn\pi/4} - e^{-jn\pi/4})]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

koji ima vrednost

$$h[n] = \big(\frac{\sqrt{2}}{4}\big)^n (\cos(n\pi/4) + 5\sin(n\pi/4))) \tag{2.18}$$

Dakle za $n = 0$ dobija se prvi odbirak

$$h[0] = \big(\frac{\sqrt{2}}{4}\big)^0 (\cos(0) + 5\sin(0))) = 1$$

za $n = 1$

$$h[1] = \big(\frac{\sqrt{2}}{4}\big)^1 (\cos(\pi/4) + 5\sin(\pi/4))) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{2}$$

i tako dalje. Vrednosti niza $h[n]$ lako se određuju i prikazuju uz pomoć MATLAB® -a

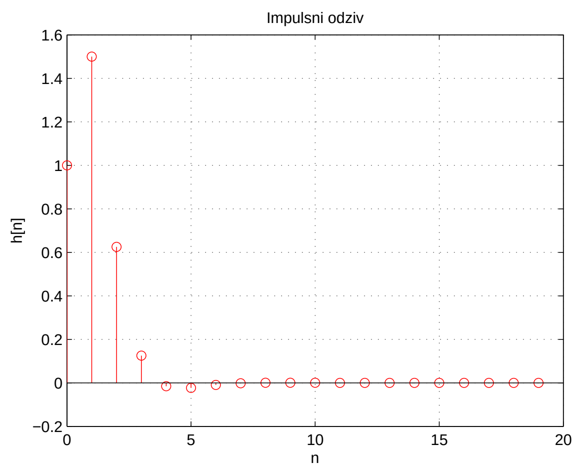
```
n=0:19;
hn=(sqrt(2)/4).^n.*(cos(n*pi/4)+5*sin(n*pi/4))
```

što daje

```
hn =

  Columns 1 through 7

    1.0000    1.5000    0.6250    0.1250   -0.0156   -0.0234   -0.0098

  Columns 8 through 14

   -0.0020    0.0002    0.0004    0.0002    0.0000   -0.0000   -0.0000

  Columns 15 through 20

   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

Napomena: U MATLAB® -u sa $*$ i ^ su obeležene operacije množenja i stepenovanja, respektivno. Ove operacije su predviđene za rad sa matricama, dok su promenljive specijalan slučaj matrice dimezija 1×1. Ukoliko nije reč o matričnom množenju, već želimo da pomnožimo svaki član vektora $\mathbf{a} = [a(1), a(2), a(3)]$ odgovarajućim članom vektora $\mathbf{b} = [b(1), b(2), b(3)]$ (koji moraju biti iste dužine), kao rezultat se dobija novi vektor iste dužine čiji su elementi $\mathbf{a}. * \mathbf{b} = [a(1) * b(1), a(2) * b(2), a(3) * b(3)]$. U sva tri slučaja reč je o vektorima, koji su specijalni slučaj matrice koja poseduje samo jednu vrstu i dužinu 3. Da je u izrazima korišćen znak ; umesto zareza, elemnti sva tri vektora bi imali identične vrednosti ali bi predstavljali specijalni slučaj matrice koja poseduje samo jednu kolonu.

Impulsni odziv $h[n]$ je prikazan na slici 2.2.



Sl. 2.2: Impulsni odziv diskretnog sistema

Treba uočiti da prenosna funkcija sistema poseduje i brojilac i imenilac, dakle reč je o rekurzivnom filtru (eng. *Infinite Impulse Response* -IIR), odnosno impulsni odziv sistema (izlaz kada je na ulazu Dirakov impuls) je beskonačno dug. Sa slike 2.2 se može pogrešno zaključiti da je impulsni odziv sistema jednak nuli već za $n = 10$ a u stvari njegova vrednost je $h[10] = 3.6621e-04$.

Da bi bolje shvatili o čemu je reč, prikazaćemo vrednosti zadnjih 9 odbiraka ($h[11]$ do $h[19]$).

```
>> hn(11:19)

ans =

   1.0e-03 *

  Columns 1 through 7

    0.1526    0.0305   -0.0038   -0.0057   -0.0024   -0.0005    0.0001

  Columns 8 through 9

    0.0001    0.0000
```

I odavde se može pogrešno zaključiti da je $h[19]$ jednak nuli a u stvari njegova vrednost je $h[19]$ =3.7253e-08.

Problem određivanja ostataka u polovima može lako biti rešen upotrebom naredbe residue u MATLAB® -u

```
brojilac=[0 1 1];
```

```
imenilac=[1 -0.5 0.125];
[r,p]=residue(brojilac,imenilac)
```

što daje kao rezultat polove smeštene u vektor p i odgovarajuće ostatke u vektoru r

```
r =

   0.5000 - 2.5000i
   0.5000 + 2.5000i

p =

   0.2500 + 0.2500i
   0.2500 - 0.2500i
```

c) S obzirom na vezu $Y(z) = H(z)X(z)$, uz poznavanje inverzne $\mathscr{Z}$ transformacije jedinične funkcije $u_0[n]$

$$u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

zaključujemo da je

$$Y(z) = \frac{z^2+z}{z^2-0.5z+0.125} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z(z^2+z)}{(z^2-0.5z+0.125)(z-1)}$$

tj.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z}{(z^2-0.5z+0.125)(z-1)} \tag{2.19}$$

Izlaz sistema ćemo odrediti uz pomoć MATLAB® -a, tj. naredbe residue, za koju su nam potrebni koeficijenti polinoma u brojiocu i imeniocu. Koeficijenti imenioca će biti takođe određeni u MATLAB® -u korišćenjem paketa za simboličku analizu.

```
syms z
Brojilac=(z^2-0.5*z+0.125)*(z-1)
collect(Brojilac)
```

daje kao rezultat

```
z^3 - (3*z^2)/2 + (5*z)/8 - 1/8
```

odnosno

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z}{z^3-(3/2)z^2+(5/8)z-1/8} \tag{2.20}$$

Sada određujemo polove i ostake u polovima

```
num=[0 1 1 0]
den=[1 -3/2 5/8 -1/8]
[r,p]=residue(num,den)
```

i oni iznose

```
r =

   3.2000 + 0.0000i
  -1.1000 + 0.3000i
  -1.1000 - 0.3000i

p =

   1.0000 + 0.0000i
   0.2500 + 0.2500i
   0.2500 - 0.2500i
```

Dakle, može se pisati

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z}{z^3-(3/2)z^2+(5/8)z-1/8} = \frac{3.2}{z-1} + \frac{-1.1+j0.3}{z-0.25-j0.25} + \frac{-1.1-j0.3}{z-0.25+j0.25} \tag{2.21}$$

što daje

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{3.2z}{z-1} + \frac{(-1.1+j0.3)z}{z-0.25-j0.25} + \frac{(-1.1-j0.3)z}{z-0.25+j0.25} \\ &= \frac{3.2z}{z-1} + \frac{(-1.1+j0.3)z}{z-0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4}} + \frac{(-1.1-j0.3)z}{z-0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4}} \end{aligned} \tag{2.22}$$

S obzirom na vezu

$$a^n u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

za $|z| > a$ za odziv sistema kada je na ulazu Hevisajdova funkcija, dobija se

$$\begin{aligned} y[n] &= 3.2 + (-1.1+j0.3)(0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4})^n + (-1.1-j0.3)(0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^n \\ &= 3.2 - 1.1[(0.25\sqrt{2})^n(e^{jn\pi/4}+e^{-jn\pi/4})] + j0.3[(0.25\sqrt{2})^n(e^{jn\pi/4}-e^{-jn\pi/4})] \end{aligned}$$

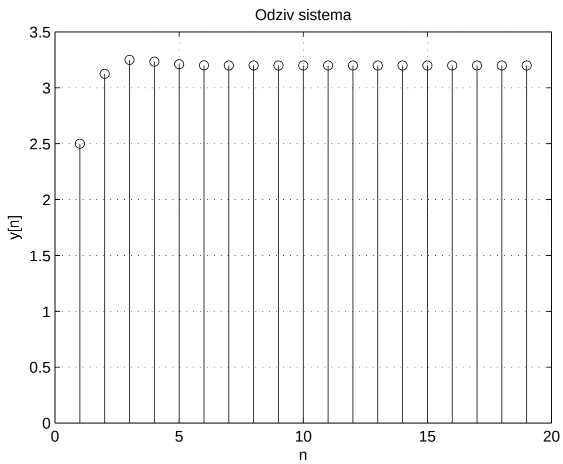
odnosno

$$\begin{aligned} y[n] &= 3.2 - 2.2\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)^n\cos(n\pi/4) - 0.6\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)^n\sin(n\pi/4) \\ &= 3.2 - \Big(\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)^n(2.2\cos(n\pi/4) + 0.6\sin(n\pi/4)) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Odziv sistema $y[n]$ prikazan je na slici 2.3

Na slici 2.4 dati su ulazni (Dirakov signal $\delta[n]$ i jedinična funkcija $u_0[n]$ i izlazni signali (Impulsni odziv $h[n]$ i odziv $y[n]$). Naredbom subplot(abc), koja ima tri argumenta a, b i c, se bira gde se željeni signal prikazuje. Parametar a ukazuje na to na koliko se delova slika deli po vertikali, b ukazuje na koliko se delova slika deli po horizontali, dok c govori o tome na kojoj od a∗b podslika će biti prikazan signal.

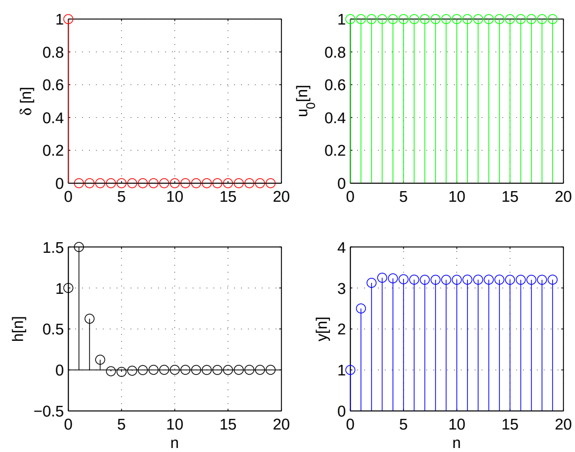
```
brojilac=[ 1 1 0];
imenilac=[1 -0.5 0.125];
dirak=[1 zeros(1,19)];
hevisajd=ones(1,20); n=[0:19];
imp_odz=filter(brojilac,imenilac,dirak);
odziv=filter(brojilac,imenilac,hevisajd);
```



Sl. 2.3: Odziv diskretnog sistema na jediničnu funkciju $u_0[n[$

```
figure subplot(221)
stem(n,dirak,'r')
grid
ylabel('\delta [n]')
subplot(223)
stem(n,imp_odz,'k')
grid
ylabel('h[n]')
xlabel('n')
subplot(222)
stem(n,hevisajd,'g')
grid
ylabel('u_0[n]')
subplot(224)
stem(n,odziv,'b')
grid
xlabel('n')
ylabel('y[n]')
```

Naredba zeros(a,b) formira matricu sa a vrsta i b kolona ispunjenu nulama. Naredba je iskorišćena za formiranje Dirakovog impulsa, gde je samo prvi član jednak jedinici. Sličan je efekat naredbe ones(a,b) samo što se matrica popunjava jedinicama tako da je ova naredba pogodna za formiranje Hevisajdove funkcije. Naredbom filter(a,b,ul) se određuje izlaz sistema čija je prenosna funkcija data koli'v cnikom polinoma a i b, kada je na ulazu sistema prisutan signal smešten u vektoru ul. Dužina izlaznog signala jednaka je dužini ulaznog signala. Kako je cilj bio odrediti prvih 20 odbiraka izlaznog signala, formirali smo ulazni signal iste dužine.

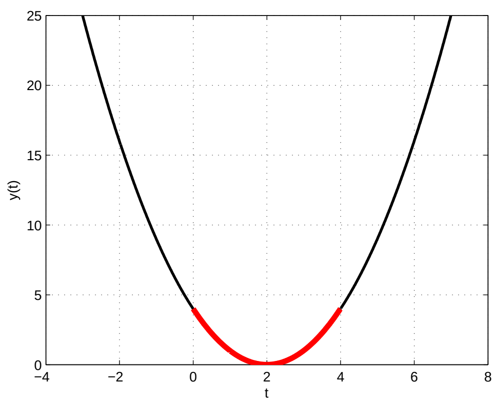


Sl. 2.4: Odziv diskretnog sistema na jedinični impuls $\delta[n]$ i jediničnu funkciju $u_0[n[$

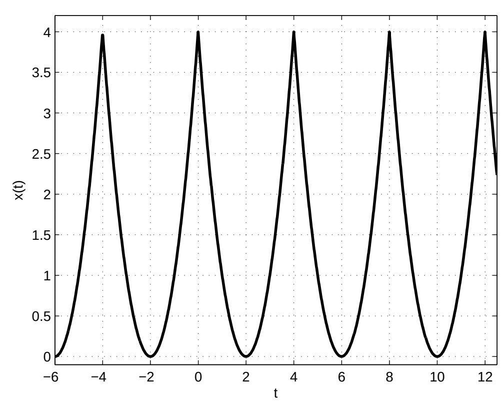
3

Diskretna Furijeova transformacija

Na slici 3.1 prikazana je funkcija $y(t) = t^2 - 4t + 4$.



Sl. 3.1: Signal $y(t) = t^2 - 4t + 4$



Sl. 3.2: Signal $x(t)$

Posmatrajmo periodični signal $x_p(t)$, osnovne periode $T = 4$, koji je nastao periodičnim ponavljanjem odsečka parabole $y(t)$ na intervalu $[0,4]$ a koji je prikazan na slici 3.2, definisan sa

$$x_p(t + kT) = t^2 - 4t + 4 \qquad \text{za} \qquad 0 < t < 4 \quad \text{i} \quad k \in Z$$

Periodična funkcija može biti data preko Furijeovog reda

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.1}$$

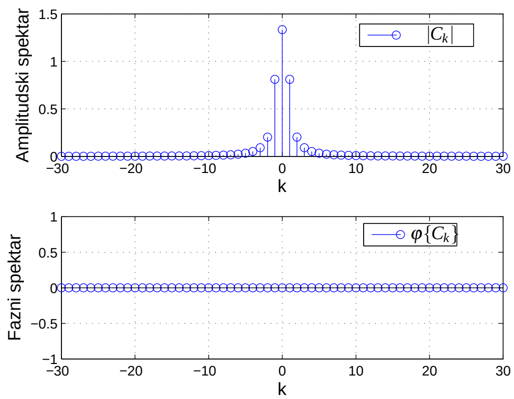
gde je

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad [\frac{rad}{s}]$$

Koeficijente C_k izračunavamo na osnovu izraza

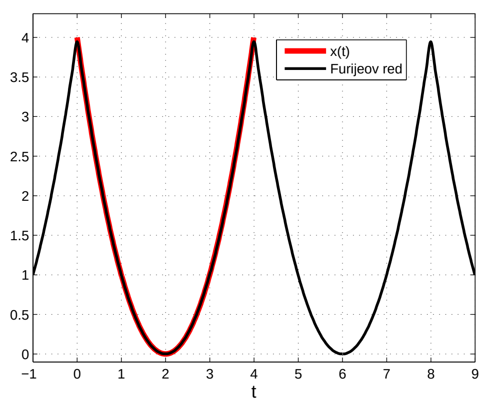
$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t} = \frac{1}{4}\int_0^4 (t^2 - 3t + 4)e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \tag{3.2}$$

Na slici 3.2 su prikazani amplitudski fazni spektar signala za $-30 < k < 30$. Na c osi je k redni broj harmonika. Slučaju $k = 0$ odgovara koeficijent $C_0 = 1.333$, što je ujedno srednja vrednost signala $x_p(t)$. Kako perioda signala iznosi $T = 4$ sekunde, osnovni harmonik ima frekvenciju $f_0 = 1/4 = 0.25$ Hz, što odgovara kružnoj učestanosti od $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 1.7 rad/s$ i na grafiku njemu odgovara $k = 1$. Četvrtom harmoniku $k = 4$ odgovara frekvencija $kf_0 = 1$ Hz. Jednakost periodične analogne funkcije bez prekida (data funkcija $x(t)$ je neprekidna) i njenog Furijeovog reda važi samo za slučaj kada $k \to \infty$.



Sl. 3.3: Amplitudski i fazni spektar signala $x_p(t)$

Furijeov red se sastoji od sume sinusnih i kosinusnih funkcija (predstavljenih preko kompleksne eksponencijalne funkcije) koje su i same neprekidne, tako da ako je funkcija $x_p(t)$ periodična ali sa prisutnim prekidima, čak i za $k \to \infty$ Furijeov red neće biti identičan sa $x_p(t)$. U ovakvim slučajevima je prisutan Gibsov fenomen.



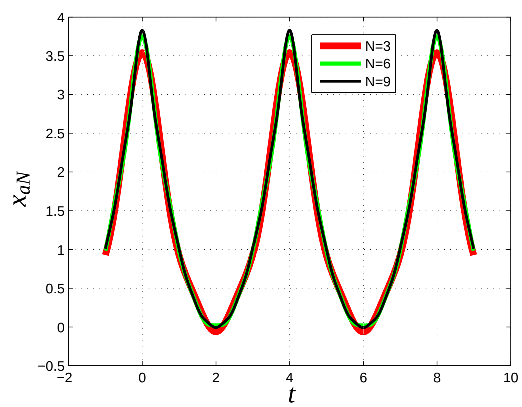
Sl. 3.4: Signal $x_p(t)$ dat na osnovnoj periodi i njegova aproksimacija $x_{a30}(t)$ dobijena skraćivanjem Furijeovog reda zadržavanjem prvih 30 harmonika

Kod prikazivanja spektra na x osi je frekvencija, nezavisno od toga da li na konkretnom grafiku stoji indeks k, sama frekvencija f data u hercima ili kružna učestanost ω_0 data u radijanima u sekundi. Spektar analognog periodičnog signala je diskretan (poseduje komponente samo na frekvencijama harmonika) sa komponentama na frekvencijama $f = 0$ (DC komponenta), $f = f_0$, $f = 2f_0$, $f = 3f_0$, itd. sve do beskonačnosti. Spektar neprekidnog periodičnog signala je bogatiji na niskim frekvencijama (komponente koje se značajno razlikuju od nule su na niskim frekvencijama) i u konkretnom slučaju uočavamo da (slika 3.3) su komponente spektra C_k za $k \geq 10$ zanemarljive.

Dakle, još jednom da naglasimo, tek beskonačno dug Furijeov red je identičan samoj periodičnoj neprekidnoj funkciji $x_p(t)$. Odsecanjem reda na konačnu dužinu N dobija se nova funkcija $x_{aN}(t)$ koja manje ili više uspešno aproksimira polaznu funkciju $x_p(t)$ zavisno od vrednosti N tj. da li su izostavljene komponente spektra (Furijeovog reda) značajno različite od nule.

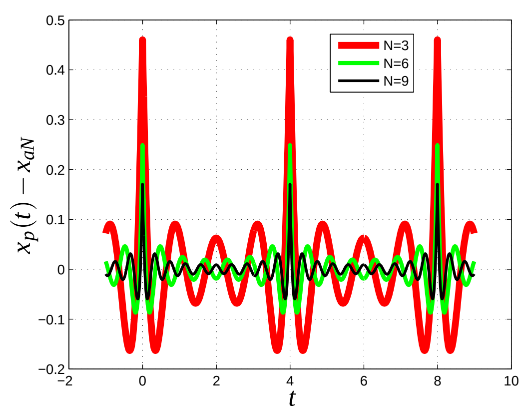
Sa slike (3.4) se uočava dobro poklapanje funkcije $x_p(t)$, koja je na slici prikazana samo na osnovnoj periodi a naravno da se periodično ponavlja na intervalu $[-\infty, +\infty]$, sa funkcijom x_{a30}. Bez izvođenja dokaza navešćemo činjenicu da je x_{aN} najbolja srednjekvadratna aproksimacija funkcije $x_p(t)$ za dato N.

Na slici 3.5 prikazane su aproksimacione funkcije x_{aN}, za različite dužine Furijeovog reda.



Sl. 3.5: Aproksimacione funkcije $x_{aN}(t)$ za $N = 3, 6$ i 9.

Na slici 3.6 je prikazano odstupanje aproksimacione funkcije dobijene skraćivanjem Furijeovog reda od "idealne" funkcije $x_p(t)$.

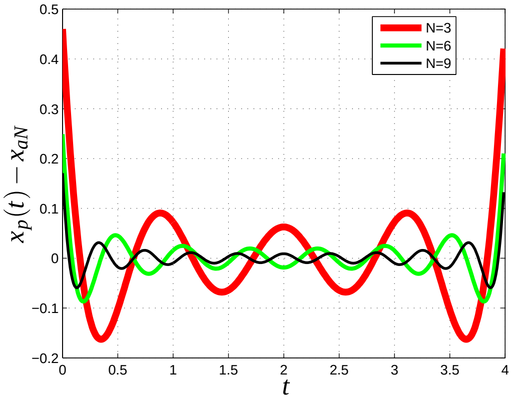


Sl. 3.6: Greška aproksimacije funkcije $x_p(t)$ za $N = 3, 6$ i 9.

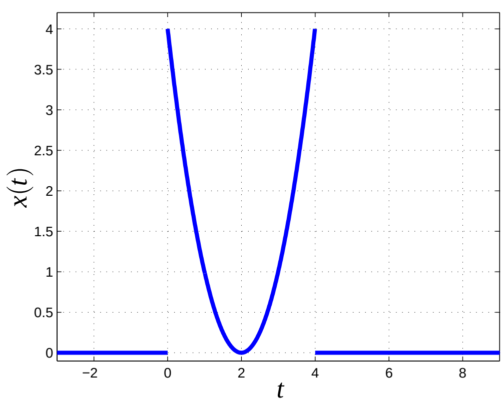
Da bi grafik greške bio uočljiviji na slici 3.7 je prikaza greška na osnovnoj periodi signala. Sa grafika se uočava značajno smanjivanje greške aproksimacije za malo povećanje dužine Furijeovog reda. Za $N > 10$ ovaj efekat bi bio značajno manji jer su na tom delu spektra komponente već bliske nuli. U konkretnom primeru vidimo da se umesto beskonačne sume prostoperiodičnih funkcija (koja je identična posmatranom signalu) signal uspešno mo ze predstaviti i sumom samo prvih desetak harmonika.

U praksi signale najčešće prikupljamo na nekom senzoru. Neka je za četiri sekunde pristigao signal oblika kao na slici 3.8.

Pre merenja $t < 0$) i po završenom merenju $t > 4$) ne posedujemo informaciju o signalu (neka je reč o



Sl. 3.7: Greška aproksimacije funkcije $x_p(t)$ za $N = 3,6$ i 9.

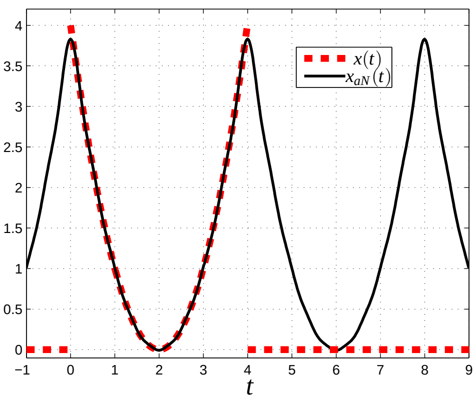


Sl. 3.8: Signal $x(t)$ - neperiodičan

pojavi koja je neponovljiva, npr. neka je u pitanju signal zemljotresa zabeležen na seizmografu). Da bi videli spektar ovog signala koristili bi već opisani matematički aparat i dobili bi identični rezultat kao i sa signalom $x_p(t)$. U ovom slučaju na osnovnoj periodi $0 \le t \le 4$, imali bi poklapanje Furijeovog reda i funkcije $x(t)$ za $k \to \infty$. Međutim za $t < 0$ i $t > 4$ signal $x(t)$ ima vrednost jednaku nuli dok Furijeov red daje funkciju koja se periodično ponavlja, kao što je prikazano na slici 3.9.

Koeficijenti C_k u opisanom primeru su određeni programom koji je priložen u nastavku. Pomoću njega su nacrtane i slike 3.3 i 3.4 za $N = 30$. Iza znaka procenat u MATLAB® -u sledi komentar.

```
t=sym('t')%definise simbolicku promenljivu t
N=3; %duzina Furijeovog reda
T=4;%perioda
k=[-N:N]';% vektor indeksa koeficijenata C_k. ' na kraju govori
% o transponovanju vektora tj. k je vektor kolona
pom=-j*2*pi/T;%pomocna promenljiva da ubrza izracunavanje ...
C_ksym=(1/T)*int((tˆ2-4*t+4)*exp(-pom*k*t),t,0,T);% Paket za simbolicku
analizu omogucava izracunavanje integrala.Prvi argument je
%funkcija  koja se integrali ,integrali se po promenljivoj  t-drugi
%argument, integral je odredjeni sa granicama integraljenja  0 i T.
C_k=double(C_ksym);% Simbolicke vrednosti smestene u vektor C_sym se
%pretvaraju u  brojne vrednosti u formatu double precision
```



Sl. 3.9: Signal $x(t)$ - neperiodičan

```
 C_k=C_k';% U formuli za C_ksym figurise vektor k koji je kolona, tako
 %da je i vektor C_ksym kolona. Ovde ga transponujemo da postane vektor
 %vrsta
 figure %crtanje spektra
subplot(211)
stem(k,abs(C_k))
grid
xlabel('k','Fontsize',13);
ylabel('Amplitudski spektar','Fontsize',13);
legend('Ckf')
subplot(212)
stem(k,angle(C_k))
legend('Ckf') grid
xlabel('k','Fontsize',13);
 ylabel('Fazni spektar','Fontsize',13);
 t=[-1:0.01:9]; %vreme, na ovom opsegu cemo crtati signale
 matrica=exp(-pom*k*t);%pomocna matrica za crtanje signala
 f_apr=C_k*mat;% aproksimacija funkcije konacnim Furijeovim redom duzine
 % N  za svaku vrednost t, izracunava f_apr(t)
 figure   % crtanje signala i njegove aproksimacije
plot(t2,yt2,'r','LineWidth',4)
 hold on % zadrzava istu sliku da bi naredna naredba crtanja (plot) novi
 %signal prikazala na istoj slici.Aktivna je dok se ne pojavi hold off
 plot(t,f_apr,'k','LineWidth',2)
 grid
 legend('x(t)','Furijeov red')
xlabel('t','Fontsize',13);
axis([-1 9 -0.1 4.3]);%Matlab sam bira granice za x i y osu osim ako se
%ne zahteva naredbom axis drugacije.Slika ce prikazati signale od -1 do
% 9 po x osi, na opsegu  od -0.1 do 4.3 po y osi
```

Kao dodatak komentarima priloženim u samom programu navešćemo vrednosti korišćenih promenljivih za slučaj $N = 3$. Vektor k je matrica kolona

```
k =
```

```
    -3
    -2
    -1
     0
     1
     2
     3
```

Na početku programa se određuju koeficijenti C_k kao simboličke vrednosti. Kako u izračuanavanju figuriše vektor k i ovaj će biti matrica kolona

```
C_ksym =

 8/(9*pi^2)
     2/pi^2
     8/pi^2
        4/3
     8/pi^2
     2/pi^2
 8/(9*pi^2)
```

U opštem slučaju koeficijenti C_k su kompleksni brojevi ali konkretno slučaju reč je o čisto realnim vrednostima što ukazuje na prisutnost samo kosinusnog reda jer je posmatrana funkcija parna (sinusni red je prisutan kada C_k poseduje i imaginarni deo).

U narednom koraku se ove simbolike vrednosti pretvaraju u brojne (izračunaju se prikazani izrazi) i smešatju u vektor C_k, koji posle transponovanja (postaje matrica vrsta) ima vrednost

```
C_k =

    0.0901    0.2026    0.8106    1.3333    0.8106    0.2026    0.0901
```

Prva 3 člana odgovaraju koeficijentima C_k za $k = -3, -2, -1$, centralni član vrednosti 1.3333 je C_0, uvek realne vrednosti i odgovara srednjoj vednosti signala a poslednja 3 člana su koeficijenti C_k za $k = 1, 2, 3$. Da napomenemo da važi da je $C_k = C^*_{-k}$, tj. međusobno su konjugovano kompleksni. U datom primeru su svi koeficijent realni pa su C_k i C_{-k} međusobno identični.

Da bi nacrtali aproksimacionu funkciju neophodno je izračunati vrednost Furijeovog reda za svaku vrednost t. U datom primeru vektor t je vrsta sa 1001 članom jer su granice -1 i 9 a korak 0.01. Praktično za svaku vrednost t treba odrediti vrednost

$$x_a(t) = \sum_{k=-N}^{N} C_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.3}$$

Vidimo da za izračunavanje jedne vrednosti signala $x_a(t)$ treba sumirati proizvod odgovarajućih članova 2 vektora, C_k i $B_k = e^{jk\omega_0 t} = B_{k,t}$, konkretno na osnovu (3.3) je

$$\begin{aligned}
x_a(t_1) &= C_{-3}B_{-3,t_1} + C_{-2}B_{-2,t_1} + C_{-1}B_{-1,t_1} + \cdots + C_3B_{3,t_1} \\
x_a(t_2) &= C_{-3}B_{-3,t_2} + C_{-2}B_{-2,t_2} + C_{-1}B_{-1,t_2} + \cdots + C_3B_{3,t_2} \\
&\dots \\
x_a(t_i) &= C_{-3}B_{-3,t_i} + C_{-2}B_{-2,t_i} + C_{-1}B_{-1,t_i} + \cdots + C_3B_{3,t_i} \\
&\dots \\
x_a(t_{1001}) &= C_{-3}B_{-3,t_{1001}} + C_{-2}B_{-2,t_{1001}} + C_{-1}B_{-1,t_{1001}} + \cdots + C_3B_{3,t_{1001}}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Cilj je izbe 'ci upotrebu for petlji što u slučaju MATLAB® -a značajno ubrzava izvršavanje programa i iskoristiti njegovu moguńost lake manipulacije nad matricama.

Proizvod matrice vrste i matrice kolone je konstanta tj.

$$[C_1\ C_2\ C_3]\cdot\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}=C_1B_1+C_2B_2+C_3B_3 \tag{3.5}$$

Koeficijenti C_k se koriste pri izračunavanju svake vrednosti signala $x_a(t)$ (za svako t). Da bi dobili vrednost funkcije x_a za sve vrednosti vektora t, vektor vrstu C_k pomnožićemo matricom čija se svaka kolona odnosi na jednu vrednost t_i. Praktično množimo 2 matrice

$$C_{(1\times N)}*Matrica_{(N\times 1001)}=x_{(1\times 1001)}$$

Na osnovu izraza (3.3) računa se

$$\begin{bmatrix}C_{-N} & C_{-N+1} & \dots & C_{N-1} & C_N\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{j(-N)\omega_0t_1} & e^{j(-N)\omega_0t_2} & \dots & e^{j(-N)\omega_0t_{1001}}\\ e^{j(-N+1)\omega_0t_1} & e^{j(-N+1)\omega_0t_2} & \dots & e^{j(-N+1)\omega_0t_{1001}}\\ e^{j(-N+2)\omega_0t_1} & e^{j(-N+2)\omega_0t_2} & \dots & e^{j(-N+2)\omega_0t_{1001}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ e^{j(N-1)\omega_0t_1} & e^{j(N-1)\omega_0t_2} & \dots & e^{j(N-1)\omega_0t_{1001}}\\ e^{j(N)\omega_0t_1} & e^{j(N)\omega_0t_2} & \dots & e^{j(N)\omega_0t_{1001}}\end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Matrica iz izraza (3.6) odgovara promenljivoj Matrica u priloženom kodu MATLAB® programa. Dakle, kao rezultat ovog množenja dobija se vektor (matrica vrsta) dužine 1001, u programu obeležen sa f_apr a koji odgovara aproksimacionoj funkciji $x_a(t)$,

Kako je formirana matrica *Matrica* ? Najjednostavniji pristup, primenjen u programu, svodi se na množenje matrice kolone (vektor k u programu) matricom vrstom (vektor t) tj.

$$k\cdot t=\begin{bmatrix}-N\\-N+1\\ \vdots\\ N-1\\ N\end{bmatrix}_{2N+1\times 1}\cdot\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & \dots & t_{1000} & t_{1001}\end{bmatrix}_{1\times 1001} \tag{3.7}$$

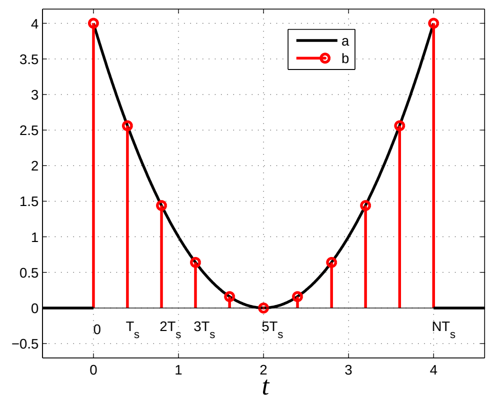
Rezultat ovog matričnog množenja je matrica

$$\begin{bmatrix}(-N)t_1 & (-N)t_2 & \dots & (-N)t_{1001}\\ (-N+1)t_1 & (-N+1)t_2 & \dots & (-N+1)t_{1001}\\ (-N+2)t_1 & (-N+2)t_2 & \dots & (-N+2)t_{1001}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (N-1)t_1 & (N-1)t_2 & \dots & (N-1)t_{1001}\\ (N)t_1 & (N)t_2 & \dots & (N)t_{1001}\end{bmatrix}_{2N+1\times 1001} \tag{3.8}$$

koja pomnožena sa $j\omega_0$ predstavlja argument eksponencijalne funkcije i omogućava formiranje matrice iz izraza (3.6).

Pretpostavimo sada da je analogni signal prikazan na slici 3.8 odabran frekvencijom F_s. Odbirici se na vremenskoj osi nalaze na međusobnom rastojanju $T_s=1/F_s$ i ima ih ukupno N, kao što je dato na slici 3.10.

Važi da je $x_d[k]=x((k-1)T_s)$ za vektore date u MATLAB® -u. U MATLAB® -u vektori imaju indeks koji kreće od jedinice (niz x ima članove $x[1],x[2],\dots,x[N]$) a prvi trenutak kada se kreće analiza signala je obelžen



Sl. 3.10: Analogni signal $x(t)$ a) i diskretni signal $x_d[n]$ dobijen njegovim odabiranjem b)

kao nulti. U izrazima ćemo za odbirke signala x koristiti oznake $x[0], x[1], \ldots, x[N-1]$ (ima ih ukupno N) a oni će u programima biti dati kao $x(1), x(2), \ldots, x(N)$. Pri analizi spektra analognog signala koristili smo izraz 3.2

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t} \tag{3.9}$$

Sada kada posedujemo odbirke signala $x(t)$ iskoristićemo izraz 3.9 uz malo prilagođavanje istog. Podsetimo se činjenice da će odgovarajuću Furijeov red dati periodičnu funkciju koja se poklapa sa polaznom funkcijom na osnovnoj periodi. Za takav pristup je osnovna perioda $T = 4s$ a na ovom intervalu je smešteno ukupno N odbiraka, odnosno može se reći da je $T = NT_s$. Kako je dobijen diskretni signal u izrazu (3.9) integral će biti zamenjen sumom tako da se dobija

$$\frac{1}{NT_s}\sum_{i=0}^{N-1} x_d[i]e^{-jk\omega_0(iT_s)} = \frac{1}{NT_s}\sum_{i=0}^{N-1} x_d[i]e^{-jk\frac{2\pi}{NT_s}(iT_s)} \tag{3.10}$$

uzevši u obzir da je diskretizovana vremenska osa pa je sad t zamenjeno sa iT_s, gde je i ceo broj. Koeficijentima C_k koji odgovaraju analognom signalu odgovaraju koeficijenti c_k

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_d[i]e^{-jki\frac{2\pi}{N}} \tag{3.11}$$

Izraz je nastao na osnovu (3.10) eliminacijom T_s ispred sume jer je perioda (T u sekundama, kod analognog signala) diskretnog signala data celim brojem N posle koga se signal ponavlja. Dakle možemo reći da na neki način koeficijenti c_k ukazuju na spektralni sadržaj signala x_d.

Po definiciji koeficijenti diskretne Furijeove transformacije signala x dobijaju se iz izraza

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jmn\frac{2\pi}{N}} \quad , m = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3.12}$$

i vidimo da odgovaraju skaliranim vrednostima koeficijenata c_k pomnoženim sa N - dužinom sekvence. Inverzna diskretna Furijeova transformacija omogućava rekonstrukciju signala iz frekvencijskog domena

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{jmn\frac{2\pi}{N}} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3.13}$$

Treba primetiti da član $e^{-jmn\frac{2\pi}{N}}$ (ovo je formula koja predstavlja kompleksne brojeve koji se nalaze na jediničnom krugu, jer je moduo uvek jednak jedinici a pod uglom $2\pi mn/N$ u odnosu na pozitivni deo x ose) se svodi na $\cos(mn\frac{2\pi}{N}) + j\sin(mn\frac{2\pi}{N})$, gde su m, n i N celi brojevi. Sinusna i kosinusna funkcija su periodične sa periodom 2π. Najmanji korak je $2\pi/N$ tako da na jediničnom krugu (ugao se kreće od 0 do 2π) postoji tačno N ekvidistantnih različitih vredosti. Analizom preslikavanja s ravni u z ravan videli smo da se frekvencijska osa ($j\omega$ osa) preslikava tačno na jedinični krug. Tačnije odsečak $j\omega$ ose koji odgovara frekvencijama $[-F_s/2, F_s/2]$ se preslikava na ceo jedinični krug. Uobičajeno je da se analogni signal najpre filtrira niskofrekventnim filtrom kako bi se ograničio spektar signala. U narednom koraku se radi analogno digitalna konverzija pri čemu frekvencija odabiranja treba da bude bar dvostruko veća od maksimalne frekvencije u spektru signala. U z ravni, tački $\omega = 0$ iz s ravni odgovara tačka $z = e^{j0} = 1$, dok se tačka $\omega_s/2 = 2\pi f_s/2 = \pi f_s$ preslikava u $z = e^{j\pi} = -1$. Diskretna Furijeova transformacija se u MATLAB® -u izračunava naredbom fft. Naziv je nastao od izraza ***F**ast **F**ourier **T**ransform* tj. reče je o brzoj Furijeovoj transformaciji. Brza Furijeova transformacija nije neka nova transformacija, već je reč o brzom algoritmu za izračunavanje diskretne Furijeove transformacije. Izračunavanje se svodi na upotrebu množenja i sabiranja te lako može biti implementirano na bilo kom procesoru.

Zadatak 41 Izračunati diskretnu Furijeovu transformaciju signala $x = \{1, 2, 3, -2, 0, 4, 1\}$ i nacrtati amplitudski i fazni spektar.

Rešenje:

Signal x ima dužinu $N = 7$, gde je $x[0] = 1, x[1] = 2, \ldots, x[6] = 1$. Na osnovu izraza (3.12) za $m = 0$ dobija se član X_0

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jmn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{6} x[n]e^{-j0} = x[0] + x[1] + x[2] + \cdots + x[6] \\ &= 1 + 2 + 3 + (-2) + 0 + 4 + 1 = 9 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Bez obzira na dužinu N i vrednosti članova niza x, X_0 se uvek dobija kao prosta suma svih članova niza x, tako da je uvek reč o realnoj vrednosti a koja je srazmerna vrednosti DC komponente signala x.

Za $m = 1$ se dobija

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{n=0}^{6} x[n]e^{-jn\frac{2\pi}{7}} = x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{7}} + x[2]e^{-j2\frac{2\pi}{7}} + \cdots + x[6]e^{-j6\frac{2\pi}{7}} \\ &= 1 + 2(\cos(\frac{2\pi}{7} - j\sin(\frac{2\pi}{7})) + 3(\cos(\frac{4\pi}{7}) - j\sin(\frac{4\pi}{7})) \\ &- 2(\cos(\frac{6\pi}{7}) - j\sin(\frac{6\pi}{7})) + 4(\cos(\frac{10\pi}{7} - j\sin(\frac{10\pi}{7})) + (\cos(\frac{12\pi}{7}) - j\sin(\frac{12\pi}{7})) \\ &= 1 + 2(0.6235 - j0.7818) + 3(-0.2225 - j0.9749) - 2(-0.9010 - j0.4339) \\ &+ 4(-0.2225 + j0.9749) + (0.6235 + j0.7818) \\ &= 3.1148 + j1.0609 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Za $m = 2$

$$\begin{aligned} X_2 &= \sum_{n=0}^{6} x[n]e^{-j2n\frac{2\pi}{7}} = x[0]e^{-j0} + x[1]e^{-j\frac{4\pi}{7}} + x[2]e^{-j\frac{8\pi}{7}} + \cdots + x[6]e^{-j\frac{24\pi}{7}} \\ &= 1 + 2(-0.2225 - j0.9749) + 3(-0.9010 + j0.4339) - 2(0.6235 + j0.7818) \\ &+ 4(-0.9010 - j0.4339) + (-0.2225 + j0.9749) \\ &= -7.2213 - j2.9725 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Za $m = 3$

$$
\begin{aligned}
X_3 = \sum_{n=0}^{6} x[n] e^{-j3n\frac{2\pi}{7}} &= e^{-j0} + 2e^{-j\frac{6\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{12\pi}{7}} \\
&+ (-2)e^{-j\frac{18\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{30\pi}{7}} + e^{-j\frac{36\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(-0.9010 - j0.4339) + 3(0.6235 + j0.7818) - 2(-0.2225 - j0.9749) \\
&+ 4(0.6235 - j0.7818) + (-0.9010 + j0.4339) \\
&= 3.1066 + j0.7341
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Za $m = 4$

$$
\begin{aligned}
X_4 = \sum_{n=0}^{6} x[n] e^{-j4n\frac{2\pi}{7}} &= e^{-j0} + 2e^{-j\frac{8\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{16\pi}{7}} \\
&+ (-2)e^{-j\frac{24\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{40\pi}{7}} + e^{-j\frac{48\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(-0.9010 + j0.4339) + 3(0.6235 - j0.7818) - 2(-0.2225 + j0.9749) \\
&+ 4(0.6235 + j0.7818) + (-0.9010 - j0.4339) \\
&= 3.1066 - j0.7341
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Za $m = 5$

$$
\begin{aligned}
X_5 = \sum_{n=0}^{6} x[n] e^{-j5n\frac{2\pi}{7}} &= e^{-j0} + 2e^{-j\frac{10\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{20\pi}{7}} \\
&+ (-2)e^{-j\frac{30\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{50\pi}{7}} + e^{-j\frac{60\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(-0.2225 + j0.9749) + 3(-0.9010 - j0.4339) - 2(0.6235 - j0.7818) \\
&+ 4(-0.9010 + j0.4339) + (-0.2225 - j0.9749) \\
&= 3.1066 - j0.7341
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Poslednji član za $m = 6$ ima vrednost

$$
\begin{aligned}
X_6 = \sum_{n=0}^{6} x[n] e^{-j6n\frac{2\pi}{7}} &= e^{-j0} + 2e^{-j\frac{12\pi}{7}} + 3e^{-j\frac{24\pi}{7}} \\
&+ (-2)e^{-j\frac{36\pi}{7}} + 4e^{-j\frac{60\pi}{7}} + e^{-j\frac{72\pi}{7}} \\
&= 1 + 2(0.6235 + j0.7818) + 3(-0.2225 + j0.9749) - 2(-0.9010 + j0.4339) \\
&+ 4(-0.2225 - j0.9749) + (0.6235 - j0.7818) \\
&= 3.1148 - j1.0609
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Svi koeficijenti diskretne Furijeove transformacije su dati u tabeli3.1.

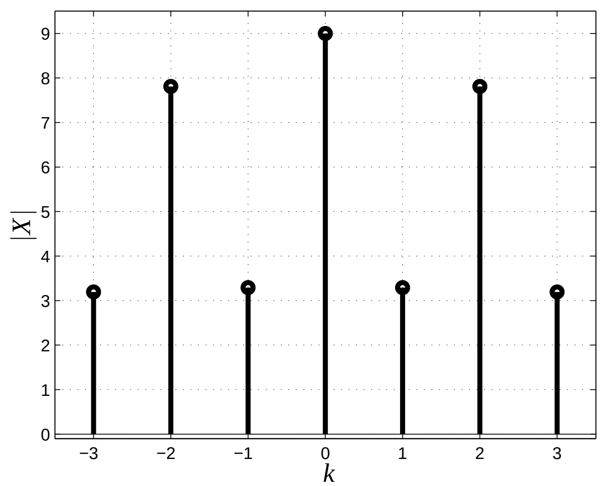
Amplitudski i fazni spektar prokazani su na slikama 3.11 i 3.12, respektivno.

Da objasnimo dobijeni rezultat. Poznato je da je spektar periodičnog analognog signala diskretan. Na grafiku spektra na x osi se nalazi frekvencija (predstavljena rednim brojem harmonika). Razmak između dve susedne komponente diskretnog spektra iznosi $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$, gde T predstavlja periodu signala. Spektar je diskretan ali poseduje beskonačno puno harmonika tj. na grafiku se frekvecijska osa prostire od 0 do ∞, nezavisno od toga što je spektar bogatiji nan niskim frekvencijama tj. iznad neke frekvencije komponente spektra (harmonici) imaju vrednost blisku nuli. Aperiodični analogni signal može da se posmatra kao specijalni slučaj periodičnog signala čija perioda $T \to \infty$. U tom slučaju razmak između dva harmonika $\omega_0 = 2\pi/T$ teži nuli tako da aperiodični signal ima kontinualni spektar.

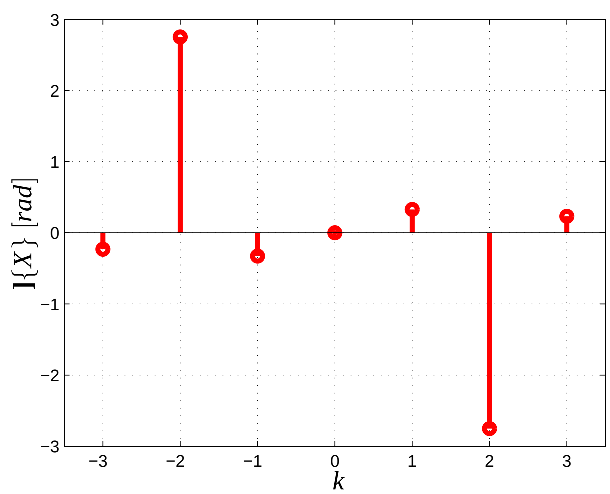
Kada je u pitanju diskretni signal, posmatranjem izraza za diskretnu Furijeovu transformaciju (3.12), vidimo da je spektar diskretan jer se na frekvencijskoj osi (koja je se sada nalazi na jediničnom krugu) ko-

Tab. 3.1: Koeficijenti diskretne Furijeove transformacije X_k

k	X_k	$\lvert X_k \rvert$	$]\{X_k\}[rad]$
0	9+j0	9	0
1	3.1148 + j1.0609	3.2905	0.3283
2	-7.2213 - j2.9725	7.8092	-2.7511
3	3.1066 + j0.7341	3.1921	0.2321
4	3.1066 - 0.7341	3.1921	-0.2321
5	-7.2213 + 2.9725	7.8092	2.7511
6	3.1148 - 1.0609	3.2905	-0.3283

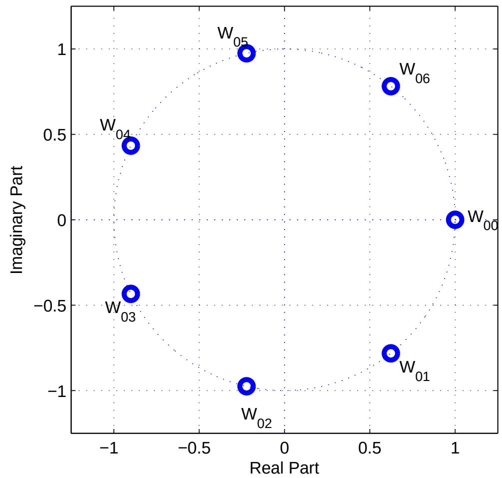


Sl. 3.11: Amplitudski spektar signala x



Sl. 3.12: Fazni spektar signala x

riste samo tačke koje su pod uglom koji je celobrojni umnožak vrednosti $2\pi/N$ gde N predstvalja dužinu niza x, kako je prikazano na slici 3.13.



Sl. 3.13:

Zato je najbolje pre izračunavanja diskretne Furijeove transformacije niza x dužine N, izračunati sve vrednosti W_{ij} (ima ih N). U konkretnom slučaju one iznose

$$\begin{aligned}
W_{00} &= 1 + j0 \\
W_{01} &= 0.6235 - j0.7818 \\
W_{02} &= -0.2225 - j0.9749 \\
W_{03} &= -0.9010 - j0.4339 \\
W_{04} &= -0.9010 + j0.4339 \\
W_{05} &= -0.2225 + j0.9749 \\
W_{06} &= 0.6235 + j0.7818
\end{aligned} \tag{3.21}$$

i poređane su na jediničnom krugu u smeru kazaljke na časovniku (negativni smer) jer je argument eksponencijalne funkcije negativan. Izraz (3.12) napisaćemo u funkciji promenljive W_{ij} kao

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jmn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{mn} \quad , m = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{3.22}$$

tako da se za $m = 0$ dobija

$$X_0 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{mn} = x[0]W_{00} + x[1]W_{01} + x[2]W_{02} + x[3]W_{03} + x[4]W_{04} + x[5]W_{05} + x[6]W_{06} \tag{3.23}$$

gde je ugao između dva susedna parametra W vrednosti $2\pi/7$, kao na slici 3.13.

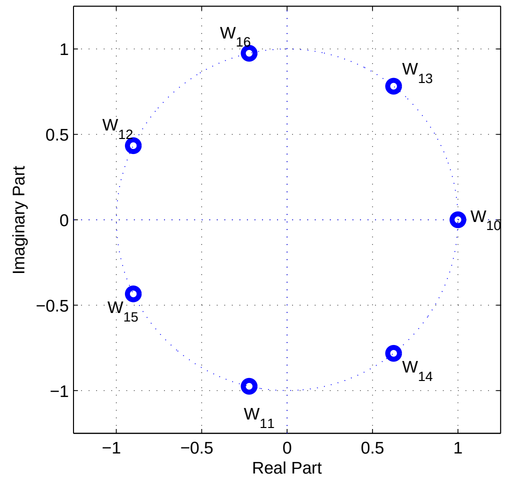
X_1 se određuje na osnovu sledećeg izraza

$$X_1 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{mn} = x[0]W_{10} + x[1]W_{11} + x[2]W_{12} + x[3]W_{13} + x[4]W_{14} + x[5]W_{15} + x[6]W_{16} \tag{3.24}$$

a vrednosti W parametara su prikazane na slici 3.14. Dakle opet koristimo istih 7 vrednosti samo je ugao između dve susedne vrednosti sada $4\pi/7$.

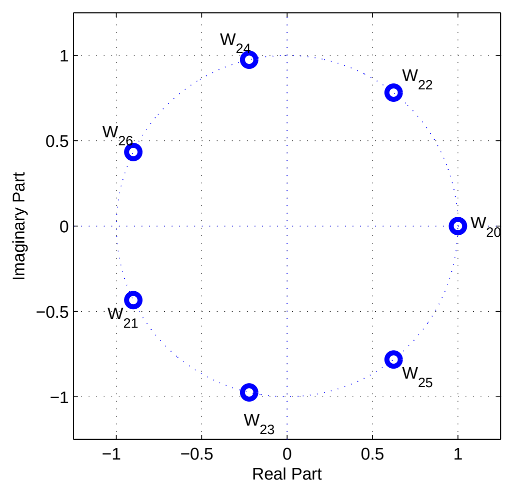
Slično je

$$X_2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{mn} = x[0]W_{20} + x[1]W_{21} + x[2]W_{22} + x[3]W_{23} + x[4]W_{24} + x[5]W_{25} + x[6]W_{26} \tag{3.25}$$



Sl. 3.14:

a slika 3.15 pokazuje poziciju W parametara



Sl. 3.15:

Gornja polovina jediničnog kruga odgovara pozitivnim frekvencijama a donja polovina negativnim. Kada je dužina niza kao u ovom primeru neparan broj N, s obzirom da je prva tačka uvek na lokaziji $z = 1$, što odgovara frekvenciji 0, ostaje po $(N-1)/2$ tačaka na pozitivnim tj na negativnim frekvencijama. Realni nizovi imaju amplitudski spektar koji je parna funkcija što je posledica činjenice da su $X_1 = X_6^*$, $X_2 = X_5^*$ i $X_3 = X_4^*$ komponenete na frekvencijama suprotnog znaka međusobno konjugovano kompleksne. Dakle, treba izračunati X_0 koji opisuje DC komponentu i još $(N-1)/2$ komponenti koje opisuju pozitivne frekvencije a komponente na negativnim frekvencijama imaju konjugovano kompleksne vrednosti.

Dakle, diskretni signal ima diskretni spektar određen brzom Furijeovom transformacijom. Za razliku od spektra periodičnog analognog signala koji ima beskonačnom komponenti spektar diskretnog signala duzžine N ima tačno $(N+1)/2$ komponneti (uključujući i DC komponentu). Sa slika 3.13, 3.14 i 3.15 vidimo da ne posedujemo informaciju (kada je niz x neparne dužine) o komponenti signala na frekvenciji $F_s/2$ jer njoj odgovara ugao π, tj. u z ravni se nalazi na lokaciji $z = -1$ a nijedna W_{ij} tačka se ne nalazi na toj lokaciji.

Drugim rečima, spektar diskretnog signala ima komponente na frekvencijama iz opsega $[0, F_s/2]$. Broj komponenti na ovom opsegu je fiksiran na $(N+1)/2$. Dakle frekvencijska rezolucija (razmak između dve susedne komponente) zavisi od dužine niza N. Za veće N treba izračunati više komponenti X_k, što zahteva izračunavanje više množenja i sabiranja ali sa druge strane dobijamo bolju informaciju o spektru signala (na više frekvencija znamo kakav je sadržaj tj. povećali smo frekvencijsku rezoluciju). U praksi se dešava da signal koji prikupljamo sa senzora ima ograničeno trajanje (npr. zemljotres) a samim tim za fiksiranu frekvenciju odabiranja posedujemo ograničen broj odbiraka a taj broj definiše frekvencijsku rezoluciju. Jedini način da povećamo frekvencijsku rezoluciju je da niz x proširimo na željenu dužinu nulama i da za tu proširenu verziju niza izračunamo diskretnu Furijeovu transformaciju.

Literatura