Univerzitet u Nišu
Elektronski fakultet

DIGITALNA OBRADA SIGNALA

Zbirka zadataka

Niš, 2020.

Sadržaj

1

Izračunavanje inverzne $\mathscr{Z}$ transformacije

Inverzna $\mathscr{Z}$ transformacija omogućava da se odredi signal $f[n]$ krenuvši od njegove $\mathscr{Z}$ transformacije $F(z)$. Na raspolaganju su tri metode kojima se mogu odrediti odbirci signala $f[n]$.

1. Razvoj u parcijalne razlomke
2. Definicioni integral
3. Beskonačno deljenje polinoma

1.1 Razvoj u parcijalne razlomke

Na prethodnom času smo radili izračunavanje inverzne z transformacije razvijanjem izraza u parcijalne razlomke. Očekujem da do kraja semestra zbirka bude gotova u celosti, dakle da se ubace i oblasti koje smo već prešli na časovima. Redovno ću na sajtu katedre postavljati materijal a najkasnije u utorak kako bi u sredu bio dostupan za eventualna pitanja. Za konsultacije ću osim sredom od 12.00 do 14.00 biti dostupan i radnim danima od 20.00 do 21.00 h. Moj skype nalog: goran.stancic13

1.2 Definicioni integral

Odbirci signala u vremenskom domenu $f[n]$ se dobijaju konturnim integralom

$$f[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \tag{1.1}$$

gde C predstavlja zatvorenu konturu koja obuhvata sve polove podintegralne funkcije. Korišćenjem Košijeve teoreme o ostacima izračunavanje integrala se svodi na sumiranje ostataka u polovima podintegralne funkcije tj.

$$f[n] = \sum_k Res\left[F(z) z^{n-1}\right]\Big|_{z=p_k} \tag{1.2}$$

gde su sa p_k obeleženi polovi podintegralne funkcije $F(z)z^{n-1}$ a $Res\left[F(z)z^{n-1}\right]$ predstavljaju ostatke u polovima $z = p_k$.

Zadatak 21 Upotrebom definicionog integrala odrediti inverznu $\mathscr{Z}$ transformaciju izraza

$$F(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0.75z^{-1})} \tag{1.3}$$

Rešenje

Množenjem brojioca i imenioca izraza (1.3) sa z^3 dobija se

$$F(z) = \frac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.75)} \tag{1.4}$$

Primenom izraza (1.2) se dobija

$$f[n] = \sum_k Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-1}}{z(z-1)(z-0.75)}\big]\big|_{z=p_k} = \sum_k Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\big]\big|_{z=p_k} \tag{1.5}$$

Zanima nas da odredimo vrednosti svih odbiraka signla $f[n]$, tj. vrednosti $f[0]$, $f[1]$, $f[2],\ldots$, odnosno vrednosti za $n = 0,1,2,\ldots$.

Za $n = 0$ izraz (1.5) postaje

$$\begin{aligned} f[0] = \sum_k Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\big]\big|_{z=p_k} = Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\big]\big|_{z=0} \\ + Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\big]\big|_{z=1} + Res\big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)(z-0.75)}\big]\big|_{z=0.75} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Napomena: kada je pol dvostruk, kao što je sada slučaj sa polom u koordinatnom početku ($z = 0$) razvojem u parcijalne razlomke javljaju se dva člana oblika

$$\frac{r_1}{z^2} + \frac{r_2}{z}$$

Ostatak u polu koji treba izračunati za izraz (1.6) je vrednost r_2. Ostatak u polu r_1 računa se na osnovu izraza

$$r_1 = \lim_{z\to 0} \frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)} \tag{1.7}$$

Ovu vrednost nije neophodno izračunavati ali nam je ovaj izraz potreban za određivanje r_2 tj.

$$\begin{aligned} r_2 &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\Big\{\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)}\Big\} = \lim_{z\to 0} \frac{(3z^2+4z)(z-1)(z-0.75)-(z^3+2z^2+1)[1\cdot(z-0.75)+(z-1)\cdot 1]}{(z-1)^2(z-0.75)^2} \\ &= \frac{0(-1)(-0.75)-(0+0+1)[1\cdot(-0.75)+(0-1)\cdot 1]}{(-1)^2(-0.75)^2} = \frac{28}{9} \end{aligned} \tag{1.8}$$

tako da prvi odbirak signala $f[n]$ ima vrednost

$$\begin{aligned} f[0] &= r_2 + \lim_{z\to 1}\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-0.75)} + \lim_{z\to 0.75}\frac{(z^3+2z^2+1)}{z^2(z-1)} \\ &= \frac{28}{9} + \frac{4}{0.25} + \frac{0.75^3+2\cdot 0.75^2+1}{0.75^2\cdot(-0.25)} = 1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Za $n = 1$ izraz (1.5) postaje

$$
\begin{aligned}
f[1] &= \sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k} = Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0}\\
&+ Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1} + Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0.75}\\
&= \Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0} + \Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1} + \Big[\frac{(z^3+2z^2+1)}{z(z-1)}\Big]\Big|_{z=0.75}\\
&= \frac{1}{(-1)(-0.75)} + \frac{4}{0.25} + \frac{0.75^3+2\cdot 0.75^2+1}{0.75(-0.25)} = \frac{4}{3} + 16 - \frac{163}{12} = \frac{15}{4}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Za $n \geq 2$ podintegralna funkcija ne poseduje pol u $z=0$ tako da preostaju samo polovi u $z=1$ i $z=0.75$. Sada se odbirci signala $f[n]$ računaju na osnovu izraza

$$
\begin{aligned}
f[n] &= \sum_k Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=p_k}\\
&= Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=1} + Res\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)(z-0.75)}\Big]\Big|_{z=0.75}\\
&= \lim_{z\to 1}\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-0.75)}\Big] + \lim_{z\to 0.75}\Big[\frac{(z^3+2z^2+1)z^{n-2}}{(z-1)}\Big]\\
&= \frac{4\cdot 1^{n-2}}{(0.25)} + \frac{(0.75^3+2\cdot 0.75^2+1)0.75^{n-2}}{-0.25} = 16 + \frac{(163/64)0.75^n}{(-0.25)0.75^2} = 16 - \frac{163}{9}0.75^n
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Na ovaj način određeni su svi elementi signala $f[n]$ tj.

$$
f[n] = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n=0 \\ \dfrac{15}{4} & \text{za} \quad n=1 \\ 16-\dfrac{163}{9}0.75^n & \text{za} \quad n \geq 2 \end{cases}
\tag{1.12}
$$

U nastavku ćemo samo pokušati da dobijeni rezultat damo u kompaktnijem obliku. Vrednost izraza $16-\frac{163}{9}0.75^n$ za $n=0$ je $16-\frac{163}{9}=\frac{16\cdot 9-163}{9}=\frac{144-163}{9}=\frac{-19}{9}$. Za $n=0$ odbirak signala $f[n]$ ima vrednost $1=\frac{9}{9}$, tako da je izraz $16-\frac{163}{9}0.75^n$ za $n=0$ potrebno korigovati ($1=\frac{-19}{9}+korekcija_1$) za vrednost $\frac{28}{9}$.

Za $n=1$ izraz $16-\frac{163}{9}0.75^n$ (koji važi samo za $n \geq 2$) ima vrednost $16-\frac{163}{9}\frac{3}{4}=\frac{29}{12}$ a odbirak signala $f[n]$ iznosi $\frac{15}{4}$, tako da vrednost izraza (1.14) treba korigovati za vrednost $\frac{4}{3}$ (dobijena iz jednačine $\frac{15}{4}=\frac{29}{12}+korekcija_2$).

Ovo nam omogućava da signal $f[n]$ zapišemo u obliku

$$
f[n] = \frac{28}{9}\delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + 16 - \frac{163}{9}0.75^n \qquad \text{za} \qquad n = 0,1,2,\dots
\tag{1.13}
$$

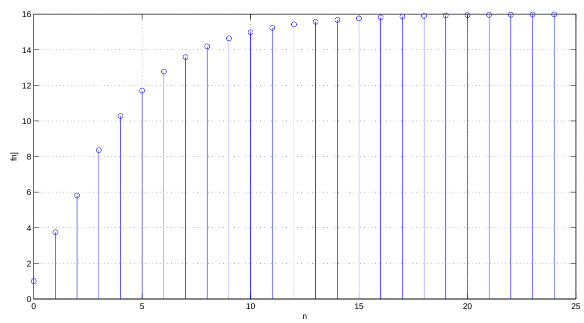
Ovako dobijen rezultat možemo lako proveriti korišćenjem Matlaba.

```
syms z n
Fz=(z^3+2*z^2+1)/(z*(z-1)*(z-0.75))
fn=iztrans(Fz)
```

na osnovu čega se dobija

```
fn =
(4*kroneckerDelta(n - 1, 0))/3 - (163*(3/4)^n)/9 +
(28*kroneckerDelta(n, 0))/9 + 16
```

Na slici 1.1 je prikazano prvih 25 odbiraka signala $f[n]$.



Sl. 1.1: Signal $f[n]$, prvih 25 odbiraka

1.3 Beskonačno deljenje polinoma

Zadatak 31 Metodom beskonačnog deljenja polinoma odrediti prva 4 člana signala $f[n]$ čija $\mathscr{Z}$ transformacija ima vrednost

$$F(z) = \frac{1+z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}}{(1-0.25z^{-1})(1-0.5z^{-1})(1-0.75z^{-1})} \tag{1.14}$$

Resenje:

Pre nego se pristupi deljenju polinoma neophodno je pomnožiti brojilac i imenilac sa z^3, čime se dobija

$$F(z) = \frac{z^3+z^2+2z+3}{(z-0.25)(z-0.5)(z-0.75)} \tag{1.15}$$

a potom srediti imenilac kako bi se dobili polinomi po promenljivoj z sa elementima koji su poređani u opadajućem redosledu stepena. U tu svrhu možemo iskoristiti Matlab koristeći naredbe

```
syms z
Imenilac=collect((z-0.25)*(z-0.5)*(z-0.75))
```

što kao rezultat daje

```
Imenilac =

z^3 - (3*z^2)/2 + (11*z)/16 - 3/32
```

a na osnovu čega izraz (1.15) postaje

$$F(z) = \frac{z^3+z^2+2z+3}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z-\frac{3}{32}} \tag{1.16}$$

a čijim se deljenjem dobija prvi član signala $f[n]$.

$$
\begin{array}{l}
(z^3+z^2+2z+3):(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}) = 1+\frac{\frac{5}{2}z^2+\frac{21}{16}z+\frac{99}{32}}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}} \\
-z^3+\frac{3}{2}z^2-\frac{11}{16}z+\frac{3}{32} \\
\hline
\frac{5}{2}z^2+\frac{21}{16}z+\frac{99}{32}
\end{array}
\tag{1.17}
$$

Za deljenje polinoma može biti iskorišćen Matlab. Polinomi se unose kao vektori, tj. nizovi brojeva koji odgovaraju koeficijentima polinoma gde se podrazumeva da su članovi uneseni po opadajućoj vrednosti stepena. U konkretnom slučaju

```
brojilac=[1 1 2 3 ]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
```

Polinome delmo naredbom `deconv` i kao rezultat se dobija količnik r i ostatak deljenja q

```
[r,q]=deconv(brojilac, imenilac)
```

što kao rezutat daje

```
r =

     1


q =

         0    2.5000    1.3125    3.0938
```

U nastavku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.17)

$$
\begin{array}{l}
(\frac{5}{2}z^2+\frac{21}{16}z+\frac{99}{32}):(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}) = \frac{5}{2}z^{-1}+\frac{\frac{81}{16}z+\frac{44}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}} \\
-\frac{5}{2}z^2+\frac{15}{4}z-\frac{55}{32}+\frac{15}{64}z^{-1} \\
\hline
\frac{81}{16}z+\frac{44}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}
\end{array}
\tag{1.18}
$$

U narednom koraku delimo brojilac i imenilac iz izraza (1.18)

$$
\begin{array}{l}
(\frac{81}{16}z+\frac{44}{32}+\frac{15}{64}z^{-1}):(z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}) = \frac{81}{16}z^{-2}+\frac{\frac{287}{32}-\frac{831}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}}{z^3-\frac{3}{2}z^2+\frac{11}{16}z+\frac{3}{32}} \\
-\frac{81}{16}z+\frac{243}{32}-\frac{891}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2} \\
\hline
\frac{287}{32}-\frac{831}{256}z^{-1}+\frac{243}{512}z^{-2}
\end{array}
\tag{1.19}
$$

S obzirom na opisanu proceduru i činjenice da deljenje izvodimo sa z^3 u narednom koraku bi se dobio količnik $\frac{287}{32}z^{-3}$. Uzevši u obzir sve prethodne izraze zaključujemo da je

$$F(z) = 1 + \frac{5}{2}z^{-1} + \frac{81}{16}z^{-2} + \frac{287}{32}z^{-3} + \frac{Narednio statak deljenja}{z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{16}z + \frac{3}{32}} \tag{1.20}$$

Na osnovu izraza (1.20) zaključujemo da je

$$f[0] = 1, f[1] = \frac{5}{2}, f[2] = \frac{81}{16}, f[3] = \frac{287}{32}, \dots$$

s obzirom da z^{-1} ima fizički smisao i odgovara kašnjenju signala za jedan period odabiranja. Slično, član Bz^{-2} predstavlja odbirak amplitude B koji kasni za dva perioda odabiranja (taktna intervala) u odnosu na prvi odbirak koji je obeležen kao $f[0]$. Uostalom, do istog zaključka se dolazi i krenuvši od definicije $\mathscr{Z}$ transformacije

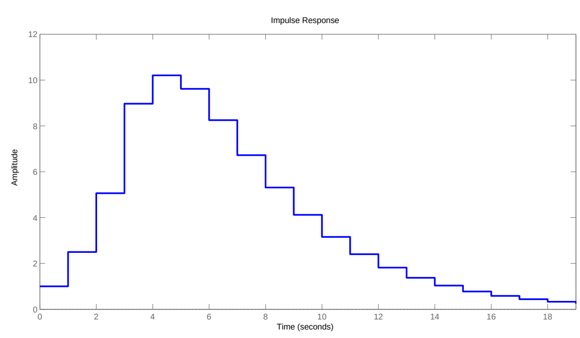
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots$$

Upoređivanjem ovog izraza sa izrazom (1.20) lako se uočavaju vrednosti odbiraka $f[0]$, $f[1]$, ...

Signal $f[n]$ u Matlabu može biti određen i naredbom `dimpulse`, čiji su ulazni argumenti koeficijenti polinoma iz brojioca i imenioca kao i dužina signala. Prvih 20 odbiraka signala $f[n]$ biće određeni naredbama

```
brojilac=[1 1 2 3]
imenilac=[1 -3/2 11/16 -3/32]
fn=dimpulse(brojilac,imenilac,20)
dimpulse(brojilac,imenilac,20)
```

Ovako određen signal $f[n]$ prikazan je na slici 1.2. (Naredba `dimpulse` služi za određivanje prvih n članova ipulsnog odziva sistema čija je prenosna funkcija data preko polinoma.)



Sl. 1.2: Signal $f[n]$, prvih 20 odbiraka

Ova metoda, za razliku od opisane prethodne dve nije praktična odnosno pogodna za određivanje vrednosti signala u vremenskom domenu na osnovu poznate $\mathscr{Z}$ transformacije jer je za određivanje n-tog člana neophodno odrediti svih $n-1$ prethodnih a svi se dobijaju deljenjem dva polinoma.

Najvažnije osobine tri opisane metode date su u tabeli 1.1.

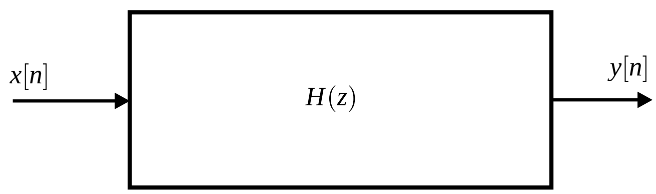
Tab. 1.1: Osobine metoda za izračunavanje inverzne $\mathscr{Z}$ transformacije

Metod	Prednosti	Mane
Razvoj na parcijalne razlomke	♡ Dobro poznata ♡ Može se koristiti Matlab naredba residue	✠ Neophodno je da $F(z)$ bude racionalna funkcija
Definicioni integral	♡ Može se koristiti i kada $F(z)$ nije racionalna funkcija	✠ Zahteva poznavanje teoreme o ostacima
Beskonačno deljenje polinoma	♡ Korisna kada se traži mali broj odbiraka ♡ Korisna kada inverzna $\mathscr{Z}$ transformacija nema rešenje u zatvorenom obliku ♡ Može se koristiti Matlab naredba dimpulse	✠ $F(z)$ mora da bude racionalna funkcija ✠ Deljenje može biti beskonačno

2

Prenosna funkcija diskretnih sistema

Diskretni sistem prikazan na slici 2.1



Sl. 2.1: Blok dijagram diskretnog sistema

može biti opisan *diferencnom* jednačinom

$$\begin{aligned} &y[n]+b_1y[n-1]+b_2y[n-2]+b_3y[n-3]\cdots+b_ky[n-k] \\ &\quad = a_0x[n]+a_1x[n-1]+a_2x[n-2]+a_3x[n-3]+\cdots+a_kx[n-k] \end{aligned} \tag{2.1}$$

gde a_i i b_i predstavljaju konstantne koeficijente. Prethodni izraz može biti dat u kompaktnijoj formi ako izraz (2.1) napišemo u obliku

$$\begin{aligned} y[n] &= a_0x[n]+a_1x[n-1]+a_2x[n-2]+a_3x[n-3]+\cdots+a_kx[n-k] \\ &\quad - \big(b_1y[n-1]+b_2y[n-2]+b_3y[n-3]\cdots+b_ky[n-k]\big) \end{aligned} \tag{2.2}$$

odnosno

$$y[n] = \sum_{i=0}^{k} a_ix[n-i] - \sum_{i=1}^{k} b_iy[n-i] \tag{2.3}$$

Dakle, u opštem slučaju n-ti odbirak izlaznog signala $y[n[$ (koji se pojavljuje u trenutku nT, gde je T period odmeravanja ulaznog signala, na vremenskoj osi na kojoj smo nultim trenutkom proglasili poziciju kada se pojavio prvi odbirak ulaznog signala) zavisi od vrednosti prisutne na ulazu tj. od $x[n]$ ali i od k vrednosti koje su bile prisutne kako na ulazu sistema ($x[n-1],\ldots,x[n-k]$) tako i na izlazu sistema ($y[n-1],\ldots,y[n-k]$). Ovo ukazuje na činjenicu da je i kod softverske i kod hardverske realizacije diskretnog sistem neophodno nekako sačuvati k poslednjih odbiraka ulaznog i izlaznog signala. Kod softverske realizacije će biti neophodno da se rezerviše memorija dužine $2k$ za ove potrebe a kad je u pitanju hardverska realizacija za to će biti iskorišćena dva pomeračka n-tobitna (eng. *shift*) registra dužine k, gde n ukazuje na broj bitova koji je predviđen za predstavljanje koeficijenata a_i i b_i. Na osnovu izraza (2.3) uočavamo da se najnoviji izlazni odbirak označen sa $y[n]$ dobija samo na osnovu operacija množenja i sabiranja nad odbircima ulaznog i izlaznog signala.

Dakle za hardversku realzicaiju bilo kog diskretnog sistema dovoljno je iskoristiti sabirače, množače i memorijske elemente (pomerački registar će praktično igrati ulogu elementa za kašnjenje jer on u sebi čuva uvek k poslednjih odbiraka signala, koji se pomeraju za jedno mesto pri pojavi svakog taktnog impulsa a čiji je razmak upravo jednak periodi odabiranja signala, tj. ceo sistem radi na frekvenciji F_s (frekvencija odabiranja, eng. *Sampling frequency*)).

Ako pretpostavimo da su svi početni uslovi jednaki nuli, tj. da je $x[i] = 0$ i $y[i] = 0$ za $i < 0$, izračunavanjem $\mathscr{Z}$ transformacije leve i desne strane izraza (2.3), uzimajući u obzir osobinu $\mathscr{Z}$ transformacije

$$f[n-m] \Leftrightarrow z^{-m}F(z)$$

dobija se

$$\begin{aligned} &Y(z) + b_1 z^{-1}Y(z) + b_2 z^{-2}Y(z) + b_3 z^{-3}Y(z) \cdots + b_k z^{-k}Y(z) \\ &= a_0 X(z) + a_1 z^{-1}X(z) + a_2 z^{-2}X(z) + a_3 z^{-3}X(z) + \cdots + a_k z^{-k}X(z) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Izvlačenjem ispred zagrada $X(z)$ i $Y(z)$

$$\begin{aligned} &Y(z)\left[1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} \cdots + b_k z^{-k}\right] \\ &= X(z)\left[a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_k z^{-k}\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

dolazimo do veze između $\mathscr{Z}$ transformacija izlaznog i ulaznog signala sistema

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_k z^{-k}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} \cdots + b_k z^{-k}} X(z) \tag{2.6}$$

U prethodnom izrazu racionalna funkcija dva polinoma po promenljivoj z predstavlja prenosnu funkciju sistema

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots + a_k z^{-k}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} \cdots + b_k z^{-k}} \tag{2.7}$$

odnosno dolazimo do očekivane veze

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{2.8}$$

Dakle, $\mathscr{Z}$ transformacija izlaznog signala se dobija množenjem prenosne funkcije sistema i $\mathscr{Z}$ transformacije ulaznog signala. Vrednost izlaznog signala u vremenskom domenu $y[n]$ dobijamo inverznom $\mathscr{Z}$ transformacijom nad $Y(z)$.

Impulsni odziv diskretnog sistema $h[n]$ se dobija na izlazu sistema ako je na njegovom ulazu prisutan jedinični impuls (Dirakov impuls) $x[n] = \delta[n]$. Kako je

$$\mathscr{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \tag{2.9}$$

na osnovu izraza (2.8) je

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z) \cdot 1 = H(z) \tag{2.10}$$

odnosno, impulsni odziv diskretnog sistema se može dobiti inverznom $\mathscr{Z}$ transformacijom prenosne funkcije sistema

$$y[n] = h[n] = \mathscr{Z}^{-1}\left\{H(z)\right\} \tag{2.11}$$

Zadatak 31 Diferencna jednačina koja daje vezu između odbiraka ulaznog i izlaznog signala diskretnog sistema, data je izrazom

$$y[n]-0.5y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+x[n-1] \tag{2.12}$$

Izračunati

a) Prenosnu funkciju sistema $H(z)$

b) Diskretni impulsni odziv sistema $h[n]$

c) Odziv ovog sistema ako se na njegovom ulazu nalazi jedinična funkcija (Hevisajdova funkcija) $u_0[n]$

Rešenje:

a) Nalaženjem $\mathscr{Z}$ transformacije leve i desne strane izraza (2.12)

$$Y(z)-0.5z^{-1}Y(z)+0.125z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z) \tag{2.13}$$

odnosno

$$Y(z)\left[1-0.5z^{-1}+0.125z^{-2}\right]=X(z)\left[1+z^{-1}\right] \tag{2.14}$$

dolazi se do prenosne funkcije diskretnog sistema

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.125z^{-2}}=\frac{z^2+z}{z^2-0.5z+0.125} \tag{2.15}$$

b) Da bi se odredio impulsni odziv sistema $h[n[$ potrebno je izračunati inverznu $\mathscr{Z}$ transformaciju izraza (2.15). Koristićemo postupak razvoja u parcijalne razlomke kod kog se ne razvija sama funkcija $H(z)$ već

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z+1}{z^2-0.5z+0.125} \tag{2.16}$$

Kako je polinom u brojiocu nižeg reda od polinoma u imeniocu, može se odmah pristupiti razvoju ove funkcije. Polinom u imeniocu ima nule (što su polovi prenosne funkcije)

$$z_{1,2}=\frac{0.5\pm\sqrt{0.5^2-4\cdot 0.125}}{2}=\frac{0.5\pm\sqrt{0.25-0.5}}{2}=\frac{0.5\pm j0.5}{2}=0.25\pm j0.25$$

pa možemo pisati

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{r_1}{z-z_1}+\frac{r_2}{z-z_2}=\frac{r_1}{z-(0.25+j0.25)}+\frac{r_2}{z-(0.25-j0.25)}$$

Ostaci u polovima imaju vrednost

$$r_1=\lim_{z\to 0.25+j0.25}\frac{z+1}{z-(0.25-j0.25)}=\frac{0.25+j0.25+1}{0.25+j0.25-(0.25-j0.25)}=\frac{1.25+j0.25}{j0.5}=0.5-j2.5$$

dok se r_2 izračunava iz izraza

$$r_2=\lim_{z\to 0.25-j0.25}\frac{z+1}{z-(0.25+j0.25)}$$

koji nije neophodno dovesti do kraja s obzirom da konjugovano kompleksni polovi imaju konjugovano kompleksne ostatke, tj. $r_2=r_1^*=0.5+j2.5$, čime smo došli do identiteta

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{0.5 - j2.5}{z - 0.25 - j0.25} + \frac{0.5 + j2.5}{z - 0.25 + j0.25}$$

Uzevši u obzir da stepena funkcija ima $\mathscr{Z}$ transformaciju

$$a^n u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

za $|z| > a$, inverzna $\mathscr{Z}$ transformacija nas dovodi do vrednosti impulsnog odziva

$$\begin{aligned} h[n] &= (0.5 - j2.5)(0.25 + j0.25)^n + (0.5 + j2.5)(0.25 - j0.25)^n \\ &= (0.5 - j2.5)(0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4})^n + (0.5 + j2.5)(0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^n \\ &= 0.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{jn\pi/4}] + 0.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{-jn\pi/4}] \\ &- j2.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{jn\pi/4}] + j2.5[(0.25\sqrt{2})^n e^{-jn\pi/4}] \\ &= 0.5[(0.25\sqrt{2})^n (e^{jn\pi/4} + e^{-jn\pi/4})] - j2.5[(0.25\sqrt{2})^n (e^{jn\pi/4} - e^{-jn\pi/4})] \end{aligned} \tag{2.17}$$

koji ima vrednost

$$h[n] = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n (\cos(n\pi/4) + 5\sin(n\pi/4))) \tag{2.18}$$

Dakle za $n = 0$ dobija se prvi odbirak

$$h[0] = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^0 (\cos(0) + 5\sin(0))) = 1$$

za $n = 1$

$$h[1] = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^1 (\cos(\pi/4) + 5\sin(\pi/4))) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

i tako dalje. Vrednosti niza $h[n]$ lako se određuju i prikazuju uz pomoć Matlab-a

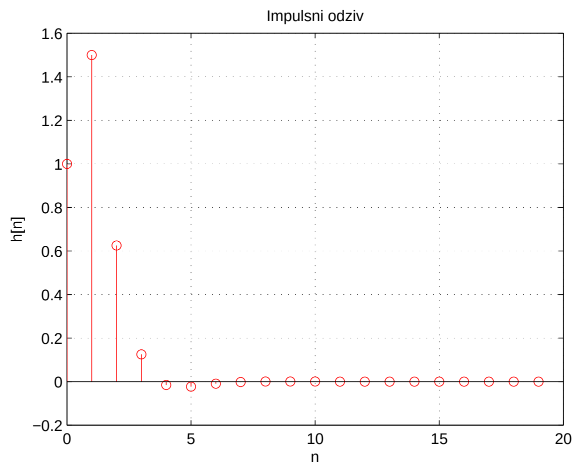
```
n=0:19;
hn=(sqrt(2)/4).^n.*(cos(n*pi/4)+5*sin(n*pi/4))
```

što daje

```
hn =

  Columns 1 through 7

    1.0000    1.5000    0.6250    0.1250   -0.0156   -0.0234   -0.0098

  Columns 8 through 14

   -0.0020    0.0002    0.0004    0.0002    0.0000   -0.0000   -0.0000

  Columns 15 through 20

   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

Napomena: U Matlabu sa $*$ i ^ su obeležene operacije množenja i stepenovanja, respektivno. Ove operacije su predviđene za rad sa matricama, dok su promenljive specijalan slučaj matrice dimezija 1×1. Ukoliko nije reč o matričnom množenju, već želimo da pomnožimo svaki član vektora $\mathbf{a} = [a(1), a(2), a(3)]$ odgovarajućim članom vektora $\mathbf{b} = [b(1), b(2), b(3)]$ (koji moraju biti iste dužine), kao rezultat se dobija novi vektor iste dužine čiji su elementi $\mathbf{a}.*\mathbf{b} = [a(1)*b(1), a(2)*b(2), a(3)*b(3)]$. U sva tri slučaja reč je o vektorima, koji su specijalni slučaj matrice koja poseduje samo jednu vrstu i dužinu 3. Da je u izrazima korišćen znak ; umesto zareza, elemnti sva tri vektora bi imali identične vrednosti ali bi predstavljali specijalni slučaj matrice koja poseduje samo jednu kolonu.

Impulsni odziv $h[n]$ je prikazan na slici 2.2.



Sl. 2.2: Impulsni odziv diskretnog sistema

Treba uočiti da prenosna funkcija sistema poseduje i brojilac i imenilac, dakle reč je o rekurzivnom filtru (eng. *Infinite Impulse Response* -IIR), odnosno impulsni odziv sistema (izlaz kada je na ulazu Dirakov impuls) je beskonačno dug. Sa slike 2.2 se može pogrešno zaključiti da je impulsni odziv sistema jednak nuli već za $n = 10$ a u stvari njegova vrednost je $h[10] = 3.6621e-04$.

Da bi bolje shvatili o čemu je reč, prikazaćemo vrednosti zadnjih 9 odbiraka ($h[11]$ do $h[19]$).

```
>> hn(11:19)

ans =

   1.0e-03 *

  Columns 1 through 7

    0.1526    0.0305   -0.0038   -0.0057   -0.0024   -0.0005    0.0001

  Columns 8 through 9

    0.0001    0.0000
```

I odavde se može pogrešno zaključiti da je $h[19]$ jednak nuli a u stvari njegova vrednost je $h[19]$ =3.7253e-08.

Problem određivanja ostataka u polovima može lako biti rešen upotrebom naredbe residue u Matlabu

```
brojilac=[0 1 1];
```

```
imenilac=[1 -0.5 0.125];
[r,p]=residue(brojilac,imenilac)
```

što daje kao rezultat polove smeštene u vektor p i odgovarajuće ostatke u vektoru r

```
r =

   0.5000 - 2.5000i
   0.5000 + 2.5000i

p =

   0.2500 + 0.2500i
   0.2500 - 0.2500i
```

c) S obzirom na vezu $Y(z) = H(z)X(z)$, uz poznavanje inverzne $\mathscr{Z}$ transformacije jedinične funkcije $u_0[n]$

$$u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

zaključujemo da je

$$Y(z) = \frac{z^2+z}{z^2-0.5z+0.125} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z(z^2+z)}{(z^2-0.5z+0.125)(z-1)}$$

tj.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z}{(z^2-0.5z+0.125)(z-1)} \tag{2.19}$$

Izlaz sistema ćemo odrediti uz pomoć Matlaba, tj. naredbe residue, za koju su nam potrebni koeficijenti polinoma u brojiocu i imeniocu. Koeficijenti imenioca će biti takođe određeni u Matlabu korišćenjem paketa za simboličku analizu.

```
syms z
Brojilac=(z^2-0.5*z+0.125)*(z-1)
collect(Brojilac)
```

daje kao rezultat

```
z^3 - (3*z^2)/2 + (5*z)/8 - 1/8
```

odnosno

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z}{z^3-(3/2)z^2+(5/8)z-1/8} \tag{2.20}$$

Sada određujemo polove i ostake u polovima

```
num=[0 1 1 0]
den=[1 -3/2 5/8 -1/8]
[r,p]=residue(num,den)
```

i oni iznose

```
r =

   3.2000 + 0.0000i
  -1.1000 + 0.3000i
  -1.1000 - 0.3000i

p =

   1.0000 + 0.0000i
   0.2500 + 0.2500i
   0.2500 - 0.2500i
```

Dakle, može se pisati

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z}{z^3-(3/2)z^2+(5/8)z-1/8} = \frac{3.2}{z-1} + \frac{-1.1+j0.3}{z-0.25-j0.25} + \frac{-1.1-j0.3}{z-0.25+j0.25} \tag{2.21}$$

što daje

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{3.2z}{z-1} + \frac{(-1.1+j0.3)z}{z-0.25-j0.25} + \frac{(-1.1-j0.3)z}{z-0.25+j0.25} \\ &= \frac{3.2z}{z-1} + \frac{(-1.1+j0.3)z}{z-0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4}} + \frac{(-1.1-j0.3)z}{z-0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4}} \end{aligned} \tag{2.22}$$

S obzirom na vezu

$$a^n u_0[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

za $|z| > a$ za odziv sistema kada je na ulazu Hevisajdova funkcija, dobija se

$$\begin{aligned} y[n] &= 3.2 + (-1.1+j0.3)(0.25\sqrt{2}e^{j\pi/4})^n + (-1.1-j0.3)(0.25\sqrt{2}e^{-j\pi/4})^n \\ &= 3.2 - 1.1[(0.25\sqrt{2})^n(e^{jn\pi/4}+e^{-jn\pi/4})] + j0.3[(0.25\sqrt{2})^n(e^{jn\pi/4}-e^{-jn\pi/4})] \end{aligned}$$

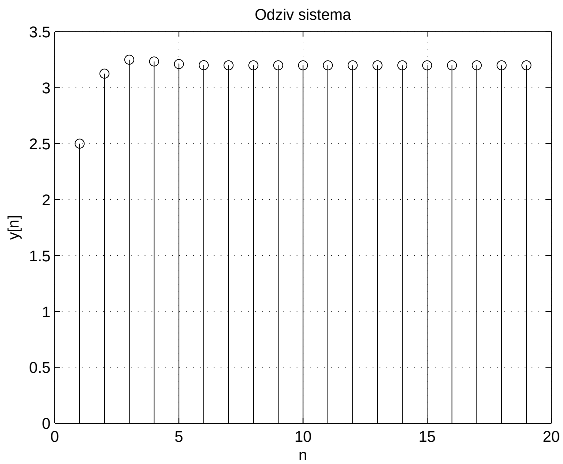
odnosno

$$\begin{aligned} y[n] &= 3.2 - 2.2\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)^n\cos(n\pi/4) - 0.6\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)^n\sin(n\pi/4) \\ &= 3.2 - \Big(\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)^n(2.2\cos(n\pi/4) + 0.6\sin(n\pi/4)) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Odziv sistema $y[n]$ prikazan je na slici 2.3

Na slici 2.4 dati su ulazni (Dirakov signal $\delta[n]$ i jedinična funkcija $u_0[n]$ i izlazni signali (Impulsni odziv $h[n]$ i odziv $y[n]$). Naredbom subplot(abc), koja ima tri argumenta a, b i c, se bira gde se željeni signal prikazuje. Parametar a ukazuje na to na koliko se delova slika deli po vertikali, b ukazuje na koliko se delova slika deli po horizontali, dok c govori o tome na kojoj od a∗b podslika će biti prikazan signal.

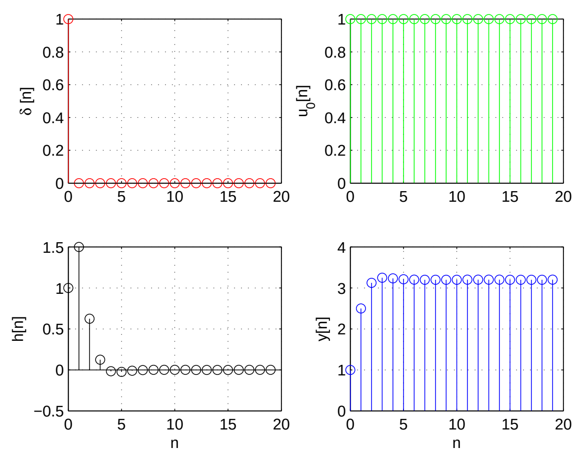
```
brojilac=[ 1 1 0];
imenilac=[1 -0.5 0.125];
dirak=[1 zeros(1,19)];
hevisajd=ones(1,20); n=[0:19];
imp_odz=filter(brojilac,imenilac,dirak);
odziv=filter(brojilac,imenilac,hevisajd);
```



Sl. 2.3: Odziv diskretnog sistema na jediničnu funkciju $u_0[n[$

```
figure subplot(221)
stem(n,dirak,'r')
grid
ylabel('\delta [n]')
subplot(223)
stem(n,imp_odz,'k')
grid
ylabel('h[n]')
xlabel('n')
subplot(222)
stem(n,hevisajd,'g')
grid
ylabel('u_0[n]')
subplot(224)
stem(n,odziv,'b')
grid
xlabel('n')
ylabel('y[n]')
```

Naredba zeros(a,b) formira matricu sa a vrsta i b kolona ispunjenu nulama. Naredba je iskorišćena za formiranje Dirakovog impulsa, gde je samo prvi član jednak jedinici. Sličan je efekat naredbe ones(a,b) samo što se matrica popunjava jedinicama tako da je ova naredba pogodna za formiranje Hevisajdove funkcije. Naredbom filter(a,b,ul) se određuje izlaz sistema čija je prenosna funkcija data koli'v cnikom polinoma a i b, kada je na ulazu sistema prisutan signal smešten u vektoru ul. Dužina izlaznog signala jednaka je dužini ulaznog signala. Kako je cilj bio odrediti prvih 20 odbiraka izlaznog signala, formirali smo ulazni signal iste dužine.



Sl. 2.4: Odziv diskretnog sistema na jedinični impuls $\delta[n]$ i jediničnu funkciju $u_0[n[$

Literatura